

Transformations de l'intrication quantique

Ion Nechita¹

¹Institut Camille Jordan, Université Lyon 1
Travail en collaboration avec Guillaume AUBRUN (ICJ)

Grenoble, 15 Mai 2007

Le modèle

L'intrication quantique

- est une des principales sources de l'étrangeté quantique;
- est une ressource essentielle dans la téléportation quantique, le codage dense, etc.;
- est indispensable au speed-up des algorithmes quantiques;
- est présente sous **différentes formes** dans la nature.

Question

Transformer l'intrication ?

L'intrication quantique

- est une des principales sources de l'étrangeté quantique;
- est une ressource essentielle dans la téléportation quantique, le codage dense, etc.;
- est indispensable au speed-up des algorithmes quantiques;
- est présente sous **différentes formes** dans la nature.

Question

Transformer l'intrication ?

L'intrication quantique

- est une des principales sources de l'étrangeté quantique;
- est une ressource essentielle dans la téléportation quantique, le codage dense, etc.;
- est indispensable au speed-up des algorithmes quantiques;
- est présente sous **différentes formes** dans la nature.

Question

Transformer l'intrication ?

L'intrication quantique

- est une des principales sources de l'étrangeté quantique;
- est une ressource essentielle dans la téléportation quantique, le codage dense, etc.;
- est indispensable au speed-up des algorithmes quantiques;
- est présente sous **différentes formes** dans la nature.

Question

Transformer l'intrication ?

L'intrication quantique

- est une des principales sources de l'étrangeté quantique;
- est une ressource essentielle dans la téléportation quantique, le codage dense, etc.;
- est indispensable au speed-up des algorithmes quantiques;
- est présente sous **différentes formes** dans la nature.

Question

Transformer l'intrication ?

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des opérations locales et de la communication classique (LOCC).
- Opérations locales:
 - 1 unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
 - 2 mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des **opérations locales** et de la **communication classique (LOCC)**.
- Opérations locales:
 - ① unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
 - ② mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des **opérations locales** et de la **communication classique (LOCC)**.
- Opérations locales:
 - ① unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
 - ② mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des **opérations locales** et de la **communication classique** (LOCC).
- Opérations locales:
 - 1 unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
 - 2 mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des **opérations locales** et de la **communication classique (LOCC)**.
- Opérations locales:
 - 1 unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
 - 2 mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des **opérations locales** et de la **communication classique (LOCC)**.
- Opérations locales:
 - 1 unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
 - 2 mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

Proposition

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un état pur. Alors il existe deux familles d'états orthogonaux $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ de \mathcal{H}_A , respectivement \mathcal{H}_B , et un vecteur de probabilités $\{\lambda_i\}$ tels que

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle.$$

Le vecteur $\lambda_\phi = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ de l'écriture précédente est unique; c'est le vecteur des coefficients de Schmidt de l'état biparti $|\phi\rangle_{AB}$.

- États séparables: $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$. La décomposition de Schmidt est donnée par l'équation précédente et on a $\lambda_\phi = (1, 0, \dots, 0)$.
- États maximalelement intriqués: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ (ici $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^d$). Le vecteur des coefficients de Schmidt est $\lambda_\psi = (1/d, 1/d, \dots, 1/d)$.

Proposition

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un état pur. Alors il existe deux familles d'états orthogonaux $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ de \mathcal{H}_A , respectivement \mathcal{H}_B , et un vecteur de probabilités $\{\lambda_i\}$ tels que

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle.$$

Le vecteur $\lambda_\phi = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ de l'écriture précédente est unique; c'est le vecteur des coefficients de Schmidt de l'état biparti $|\phi\rangle_{AB}$.

- États séparables: $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$. La décomposition de Schmidt est donnée par l'équation précédente et on a $\lambda_\phi = (1, 0, \dots, 0)$.
- États maximales intriqués: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ (ici $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^d$). Le vecteur des coefficients de Schmidt est $\lambda_\psi = (1/d, 1/d, \dots, 1/d)$.

Proposition

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un état pur. Alors il existe deux familles d'états orthogonaux $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ de \mathcal{H}_A , respectivement \mathcal{H}_B , et un vecteur de probabilités $\{\lambda_i\}$ tels que

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle.$$

Le vecteur $\lambda_\phi = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ de l'écriture précédente est unique; c'est le vecteur des coefficients de Schmidt de l'état biparti $|\phi\rangle_{AB}$.

- États séparables: $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$. La décomposition de Schmidt est donnée par l'équation précédente et on a $\lambda_\phi = (1, 0, \dots, 0)$.
- États maximalelement intriqués: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ (ici $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^d$). Le vecteur des coefficients de Schmidt est $\lambda_\psi = (1/d, 1/d, \dots, 1/d)$.

Transformations LOCC - exemples

- 1 Soit $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ un état de départ séparable.

Fait

Les transformations LOCC ne peuvent pas augmenter le paramètre d qui apparait dans la décompositions de Schmidt (appelé rang de Schmidt)

Donc, à partir d'un état $|\phi\rangle$ séparable on ne peut obtenir que des états $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$ séparables:

$$|\psi\rangle = U_A \otimes U_B |\phi\rangle,$$

où U_A est un unitaire local de Alice tel que $U_A|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ et U_B est un unitaire local de Bob tel que $U_B|\beta\rangle = |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état séparable on ne peut obtenir que des états séparables.

- 1 Soit $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ un état de départ séparable.

Fait

Les transformations LOCC ne peuvent pas augmenter le paramètre d qui apparait dans la décompositions de Schmidt (appelé rang de Schmidt)

Donc, à partir d'un état $|\phi\rangle$ séparable on ne peut obtenir que des états $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$ séparables:

$$|\psi\rangle = U_A \otimes U_B |\phi\rangle,$$

où U_A est un unitaire local de Alice tel que $U_A|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ et U_B est un unitaire local de Bob tel que $U_B|\beta\rangle = |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état séparable on ne peut obtenir que des états séparables.

- 1 Soit $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ un état de départ séparable.

Fait

Les transformations LOCC ne peuvent pas augmenter le paramètre d qui apparait dans la décompositions de Schmidt (appelé rang de Schmidt)

Donc, à partir d'un état $|\phi\rangle$ séparable on ne peut obtenir que des états $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$ séparables:

$$|\psi\rangle = U_A \otimes U_B |\phi\rangle,$$

où U_A est un unitaire local de Alice tel que $U_A|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ et U_B est un unitaire local de Bob tel que $U_B|\beta\rangle = |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état séparable on ne peut obtenir que des états séparables.

- 1 Soit $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ un état de départ séparable.

Fait

Les transformations LOCC ne peuvent pas augmenter le paramètre d qui apparait dans la décompositions de Schmidt (appelé rang de Schmidt)

Donc, à partir d'un état $|\phi\rangle$ séparable on ne peut obtenir que des états $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$ séparables:

$$|\psi\rangle = U_A \otimes U_B |\phi\rangle,$$

où U_A est un unitaire local de Alice tel que $U_A|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ et U_B est un unitaire local de Bob tel que $U_B|\beta\rangle = |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état séparable on ne peut obtenir que des états séparables.

- 1 Soit $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ un état de départ séparable.

Fait

Les transformations LOCC ne peuvent pas augmenter le paramètre d qui apparait dans la décompositions de Schmidt (appelé rang de Schmidt)

Donc, à partir d'un état $|\phi\rangle$ séparable on ne peut obtenir que des états $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$ séparables:

$$|\psi\rangle = U_A \otimes U_B |\phi\rangle,$$

où U_A est un unitaire local de Alice tel que $U_A|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ et U_B est un unitaire local de Bob tel que $U_B|\beta\rangle = |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état séparable on ne peut obtenir que des états séparables.

- ② Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent procéder de la façon suivante:
- Alice **mesure** son système dans la base $\{|\alpha_i\rangle\}_{i=1}^d$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \dots, d$. Supposons qu'elle trouve j . L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
 - Alice **communiqué** le résultat j de sa mesure à Bob.
 - Alice et Bob **appliquent**, chacun de son côté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
 - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

- ② Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent procéder de la façon suivante:
- Alice **mesure** son système dans la base $\{|\alpha_i\rangle\}_{i=1}^d$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \dots, d$. Supposons qu'elle trouve j . L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
 - Alice **communique** le résultat j de sa mesure à Bob.
 - Alice et Bob **appliquent**, chacun de son côté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
 - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

- ② Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent procéder de la façon suivante:
- Alice **mesure** son système dans la base $\{|\alpha_i\rangle\}_{i=1}^d$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \dots, d$. Supposons qu'elle trouve j . L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
 - Alice **communique** le résultat j de sa mesure à Bob.
 - Alice et Bob **appliquent**, chacun de son côté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
 - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

- ② Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent procéder de la façon suivante:
- Alice **mesure** son système dans la base $\{|\alpha_i\rangle\}_{i=1}^d$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \dots, d$. Supposons qu'elle trouve j . L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
 - Alice **communique** le résultat j de sa mesure à Bob.
 - Alice et Bob **appliquent**, chacun de son côté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
 - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

- ② Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent procéder de la façon suivante:
- Alice **mesure** son système dans la base $\{|\alpha_i\rangle\}_{i=1}^d$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \dots, d$. Supposons qu'elle trouve j . L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
 - Alice **communique** le résultat j de sa mesure à Bob.
 - Alice et Bob **appliquent**, chacun de son côté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
 - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

- ② Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent procéder de la façon suivante:
- Alice **mesure** son système dans la base $\{|\alpha_i\rangle\}_{i=1}^d$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \dots, d$. Supposons qu'elle trouve j . L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
 - Alice **communique** le résultat j de sa mesure à Bob.
 - Alice et Bob **appliquent**, chacun de son côté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
 - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

- ② Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent procéder de la façon suivante:
- Alice **mesure** son système dans la base $\{|\alpha_i\rangle\}_{i=1}^d$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \dots, d$. Supposons qu'elle trouve j . L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
 - Alice **communique** le résultat j de sa mesure à Bob.
 - Alice et Bob **appliquent**, chacun de son côté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
 - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

Théorème (Nielsen '98)

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un état pur et λ_ϕ son vecteur des coefficients de Schmidt. On définit $|\psi\rangle$ et λ_ψ de la même façon. Alors l'état $|\phi\rangle$ peut être transformé en l'état $|\psi\rangle$ par LOCC si et seulement si

$$\lambda_\phi \prec \lambda_\psi.$$

" \prec " est la **relation de domination** (majorization).

- Les vecteurs λ_ϕ et λ_ψ sont de taille au plus $\min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$. Si l'un est plus petit que l'autre, on le complète en rajoutant des zéros.
- On note $P_d = \{x \in \mathbf{R}^d \mid x_i \geq 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}$ l'ensemble convexe des vecteurs de probabilité de taille d .

Théorème (Nielsen '98)

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un état pur et λ_ϕ son vecteur des coefficients de Schmidt. On définit $|\psi\rangle$ et λ_ψ de la même façon. Alors l'état $|\phi\rangle$ peut être transformé en l'état $|\psi\rangle$ par LOCC si et seulement si

$$\lambda_\phi \prec \lambda_\psi.$$

" \prec " est la *relation de domination* (majorization).

- Les vecteurs λ_ϕ et λ_ψ sont de taille au plus $\min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$. Si l'un est plus petit que l'autre, on le complète en rajoutant des zéros.
- On note $P_d = \{x \in \mathbf{R}^d \mid x_i \geq 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}$ l'ensemble convexe des vecteurs de probabilité de taille d .

Théorème (Nielsen '98)

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un état pur et λ_ϕ son vecteur des coefficients de Schmidt. On définit $|\psi\rangle$ et λ_ψ de la même façon. Alors l'état $|\phi\rangle$ peut être transformé en l'état $|\psi\rangle$ par LOCC si et seulement si

$$\lambda_\phi \prec \lambda_\psi.$$

" \prec " est la *relation de domination* (majorization).

- Les vecteurs λ_ϕ et λ_ψ sont de taille au plus $\min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$. Si l'un est plus petit que l'autre, on le complète en rajoutant des zéros.
- On note $P_d = \{x \in \mathbf{R}^d \mid x_i \geq 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}$ l'ensemble convexe des vecteurs de probabilité de taille d .

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On note x^\downarrow (y^\downarrow) le vecteur obtenu en ordonnant les composantes de x (y) de façon décroissante. On dit que x est dominé par y et on écrit $x \prec y$ si les (in)égalités suivantes sont satisfaites:

$$x_1^\downarrow \leq y_1^\downarrow$$

$$x_1^\downarrow + x_2^\downarrow \leq y_1^\downarrow + y_2^\downarrow$$

...

$$x_1^\downarrow + x_2^\downarrow + \dots + x_{d-1}^\downarrow \leq y_1^\downarrow + y_2^\downarrow + \dots + y_{d-1}^\downarrow$$

$$x_1^\downarrow + x_2^\downarrow + \dots + x_d^\downarrow = y_1^\downarrow + y_2^\downarrow + \dots + y_d^\downarrow$$

- La relation " \prec " est un ordre partiel sur P_d . Les éléments minimum est maximum sont $(1/d, 1/d, \dots, 1/d)$ et respectivement $(1, 0, \dots, 0)$.
- C'est une relation qui a été beaucoup étudiée en algèbre linéaire [Marshall et Olkin '79, Bhatia '97].

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1 $x \prec y$,
- 2 $\forall t \in \mathbf{R}, \quad \sum_{i=1}^d |x_i - t| \leq \sum_{i=1}^d |y_i - t|$,
- 3 *Il existe une matrice bistochastique B telle que $x = By$.*

- La relation " \prec " est un ordre partiel sur P_d . Les éléments minimum est maximum sont $(1/d, 1/d, \dots, 1/d)$ et respectivement $(1, 0, \dots, 0)$.
- C'est une relation qui a été beaucoup étudiée en algèbre linéaire [Marshall et Olkin '79, Bhatia '97].

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1 $x \prec y$,
- 2 $\forall t \in \mathbf{R}, \quad \sum_{i=1}^d |x_i - t| \leq \sum_{i=1}^d |y_i - t|$,
- 3 *Il existe une matrice bistochastique B telle que $x = By$.*

- La relation " \prec " est un ordre partiel sur P_d . Les éléments minimum est maximum sont $(1/d, 1/d, \dots, 1/d)$ et respectivement $(1, 0, \dots, 0)$.
- C'est une relation qui a été beaucoup étudiée en algèbre linéaire [Marshall et Olkin '79, Bhatia '97].

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1 $x \prec y$,
- 2 $\forall t \in \mathbf{R}, \quad \sum_{i=1}^d |x_i - t| \leq \sum_{i=1}^d |y_i - t|$,
- 3 *Il existe une matrice bistochastique B telle que $x = By$.*

- Notation: pour $y \in P_d$, on pose $S_d(y) = \{x \in P_d | x \prec y\}$. C'est l'ensemble de vecteurs dominés par y .
- En termes de transformations LOCC, $S_d(\lambda_\psi)$ est l'ensemble des vecteurs de Schmidt correspondant aux états à partir desquels on peut obtenir $|\psi\rangle$.
- $S_d(y)$ est un ensemble convexe fermé. Ses points extrémaux sont y et ses permutés.

Conclusion

La relation de domination " \prec " est parfaitement comprise. Sa structure mathématique est connue.

- Notation: pour $y \in P_d$, on pose $S_d(y) = \{x \in P_d | x \prec y\}$. C'est l'ensemble de vecteurs dominés par y .
- En termes de transformations LOCC, $S_d(\lambda_\psi)$ est l'ensemble des vecteurs de Schmidt correspondant aux états à partir desquels on peut obtenir $|\psi\rangle$.
- $S_d(y)$ est un ensemble convexe fermé. Ses points extrémaux sont y et ses permutés.

Conclusion

La relation de domination " \prec " est parfaitement comprise. Sa structure mathématique est connue.

- Notation: pour $y \in P_d$, on pose $S_d(y) = \{x \in P_d | x \prec y\}$. C'est l'ensemble de vecteurs dominés par y .
- En termes de transformations LOCC, $S_d(\lambda_\psi)$ est l'ensemble des vecteurs de Schmidt correspondant aux états à partir desquels on peut obtenir $|\psi\rangle$.
- $S_d(y)$ est un ensemble convexe fermé. Ses points extrémaux sont y et ses permutés.

Conclusion

La relation de domination " \prec " est parfaitement comprise. Sa structure mathématique est connue.

- Notation: pour $y \in P_d$, on pose $S_d(y) = \{x \in P_d | x \prec y\}$. C'est l'ensemble de vecteurs dominés par y .
- En termes de transformations LOCC, $S_d(\lambda_\psi)$ est l'ensemble des vecteurs de Schmidt correspondant aux états à partir desquels on peut obtenir $|\psi\rangle$.
- $S_d(y)$ est un ensemble convexe fermé. Ses points extrémaux sont y et ses permutés.

Conclusion

La relation de domination " \prec " est parfaitement comprise. Sa structure mathématique est connue.

Transformations ELOCC

- Jonathan et Plenio [1998]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais on a $x \otimes z \prec y \otimes z$ (le produit tensoriel des états quantiques correspond pour les vecteurs de Schmidt au produit tensoriel usuel: $(x_i)_i \otimes (z_j)_j = (x_i z_j)_{ij}$).
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est ELOCC-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

Transformations ELOCC

- Jonathan et Plenio [1998]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état **catalyseur** $|\chi\rangle$, la transformation $|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais on a $x \otimes z \prec y \otimes z$ (le produit tensoriel des états quantiques correspond pour les vecteurs de Schmidt au produit tensoriel usuel: $(x_i)_i \otimes (z_j)_j = (x_i z_j)_{ij}$).
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est ELOCC-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

- Jonathan et Plenio [1998]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais on a $x \otimes z \prec y \otimes z$ (le produit tensoriel des états quantiques correspond pour les vecteurs de Schmidt au produit tensoriel usuel: $(x_i)_i \otimes (z_j)_j = (x_i z_j)_{ij}$).
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est ELOCC-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

- Jonathan et Plenio [1998]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais on a $x \otimes z \prec y \otimes z$ (le produit tensoriel des états quantiques correspond pour les vecteurs de Schmidt au produit tensoriel usuel: $(x_i)_i \otimes (z_j)_j = (x_i z_j)_{ij}$).
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est ELOCC-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

- Jonathan et Plenio [1998]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais on a $x \otimes z \prec y \otimes z$ (le produit tensoriel des états quantiques correspond pour les vecteurs de Schmidt au produit tensoriel usuel: $(x_i)_i \otimes (z_j)_j = (x_i z_j)_{ij}$).
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est ELOCC-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

- Bandyopadhyay et al. [2002]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\phi\rangle^{\otimes n} \rightarrow |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geq 2$, on a $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est MLOCC-dominé par y s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

- Bandyopadhyay et al. [2002]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\phi\rangle^{\otimes n} \rightarrow |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geq 2$, on a $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est MLOCC-dominé par y s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

- Bandyopadhyay et al. [2002]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\phi\rangle^{\otimes n} \rightarrow |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geq 2$, on a $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est MLOCC-dominé par y s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

- Bandyopadhyay et al. [2002]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\phi\rangle^{\otimes n} \rightarrow |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geq 2$, on a $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est MLOCC-dominé par y s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

- Bandyopadhyay et al. [2002]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\phi\rangle^{\otimes n} \rightarrow |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geq 2$, on a $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est MLOCC-dominé par y s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

Deux relations plus compliquées...

- Comme pour la relation de domination usuelle, on introduit les ensembles des vecteurs ELOCC/MLOCC-dominés par un vecteur donné y :

$$T_d(y) = \{x \in P_d \mid x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_d(y) = \{x \in P_d \mid x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geq 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- Pour tout y , $S_d(y) \subseteq M_d(y) \subseteq T_d(y)$.
- En général, $M_d(y)$ et $T_d(y)$ ne sont ni ouverts, ni fermés.
- $T_d(y)$ est un ensemble convexe borné.

Question

Donner des caractérisations tractables des ensembles $M_d(y)$ et $T_d(y)$.

Deux relations plus compliquées...

- Comme pour la relation de domination usuelle, on introduit les ensembles des vecteurs ELOCC/MLOCC-dominés par un vecteur donné y :

$$T_d(y) = \{x \in P_d \mid x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_d(y) = \{x \in P_d \mid x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geq 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- Pour tout y , $S_d(y) \subseteq M_d(y) \subseteq T_d(y)$.
- En général, $M_d(y)$ et $T_d(y)$ ne sont ni ouverts, ni fermés.
- $T_d(y)$ est un ensemble convexe borné.

Question

Donner des caractérisations tractables des ensembles $M_d(y)$ et $T_d(y)$.

Deux relations plus compliquées...

- Comme pour la relation de domination usuelle, on introduit les ensembles des vecteurs ELOCC/MLOCC-dominés par un vecteur donné y :

$$T_d(y) = \{x \in P_d \mid x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_d(y) = \{x \in P_d \mid x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geq 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- Pour tout y , $S_d(y) \subseteq M_d(y) \subseteq T_d(y)$.
- En général, $M_d(y)$ et $T_d(y)$ ne sont ni ouverts, ni fermés.
- $T_d(y)$ est un ensemble convexe borné.

Question

Donner des caractérisations tractables des ensembles $M_d(y)$ et $T_d(y)$.

Deux relations plus compliquées...

- Comme pour la relation de domination usuelle, on introduit les ensembles des vecteurs ELOCC/MLOCC-dominés par un vecteur donné y :

$$T_d(y) = \{x \in P_d \mid x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_d(y) = \{x \in P_d \mid x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geq 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- Pour tout y , $S_d(y) \subseteq M_d(y) \subseteq T_d(y)$.
- En général, $M_d(y)$ et $T_d(y)$ ne sont ni ouverts, ni fermés.
- $T_d(y)$ est un ensemble convexe borné.

Question

Donner des caractérisations tractables des ensembles $M_d(y)$ et $T_d(y)$.

Deux relations plus compliquées...

- Comme pour la relation de domination usuelle, on introduit les ensembles des vecteurs ELOCC/MLOCC-dominés par un vecteur donné y :

$$T_d(y) = \{x \in P_d \mid x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_d(y) = \{x \in P_d \mid x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geq 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- Pour tout y , $S_d(y) \subseteq M_d(y) \subseteq T_d(y)$.
- En général, $M_d(y)$ et $T_d(y)$ ne sont ni ouverts, ni fermés.
- $T_d(y)$ est un ensemble convexe borné.

Question

Donner des caractérisations tractables des ensembles $M_d(y)$ et $T_d(y)$.

Conjecture (Nielsen)

Soit $y \in P_d$ un vecteur de probabilités. Alors $x \in P_d$ appartient à $\overline{T_d(y)}$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

- 1 Pour $p \geq 1$, $\|x\|_p \leq \|y\|_p$;
- 2 Pour $0 \leq p \leq 1$, $\|x\|_p \geq \|y\|_p$;
- 3 Pour $p \leq 0$, $\|x\|_p \geq \|y\|_p$.

Les "normes" ℓ_p sont définies par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p}$, avec $\|x\|_0 = \#\{x_i > 0\}$.

- Dans $\overline{T_d(y)}$, la fermeture est prise dans la topologie usuelle de P_d .
- Le sens " $x \in \overline{T_d(y)} \Rightarrow$ inégalités" est une conséquence facile de la convexité/concavité des fonctions $t \mapsto t^p$ pour $p \in \mathbf{R}$ et du fait que les normes ℓ_p sont multiplicatives.

Conjecture (Nielsen)

Soit $y \in P_d$ un vecteur de probabilités. Alors $x \in P_d$ appartient à $\overline{T_d(y)}$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

- 1 Pour $p \geq 1$, $\|x\|_p \leq \|y\|_p$;
- 2 Pour $0 \leq p \leq 1$, $\|x\|_p \geq \|y\|_p$;
- 3 Pour $p \leq 0$, $\|x\|_p \geq \|y\|_p$.

Les "normes" ℓ_p sont définies par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p}$, avec $\|x\|_0 = \#\{x_i > 0\}$.

- Dans $\overline{T_d(y)}$, la fermeture est prise dans la topologie usuelle de P_d .
- Le sens " $x \in \overline{T_d(y)} \Rightarrow$ inégalités" est une conséquence facile de la convexité/concavité des fonctions $t \mapsto t^p$ pour $p \in \mathbb{R}$ et du fait que les normes ℓ_p sont multiplicatives.

Conjecture (Nielsen)

Soit $y \in P_d$ un vecteur de probabilités. Alors $x \in P_d$ appartient à $\overline{T_d(y)}$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

- 1 Pour $p \geq 1$, $\|x\|_p \leq \|y\|_p$;
- 2 Pour $0 \leq p \leq 1$, $\|x\|_p \geq \|y\|_p$;
- 3 Pour $p \leq 0$, $\|x\|_p \geq \|y\|_p$.

Les "normes" ℓ_p sont définies par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p}$, avec $\|x\|_0 = \#\{x_i > 0\}$.

- Dans $\overline{T_d(y)}$, la fermeture est prise dans la topologie usuelle de P_d .
- Le sens " $x \in \overline{T_d(y)} \Rightarrow$ inégalités" est une conséquence facile de la convexité/concavité des fonctions $t \mapsto t^p$ pour $p \in \mathbf{R}$ et du fait que les normes ℓ_p sont multiplicatives.

Le résultat

Guillaume AUBRUN et I.N. - “Catalytic majorization and ℓ_p norms”, à paraître dans Comm. in Math. Physics, arXiv:quant-ph/0702153v1.

Une observation importante

- On considère deux vecteurs $x, y \in P_d$. Pour décider si $x \prec / \prec_M / \prec_T y$, il ne faut connaître que les composantes strictement positives de x et de y .
- Il est possible donc de comparer deux vecteurs x et y de **tailles différentes** en rajoutant des composantes nulles à la fin du plus petit.
- Il semble donc naturel (au moins d'un point de vue mathématique) de considérer les ensembles suivants:

$$T_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} \mid x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_{<\infty} \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} \mid x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geq 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\},$$

où $P_{<\infty} = \bigcup_{d \geq 1} P_d$ est l'ensemble de **vecteurs de probabilités de support fini**.

Une observation importante

- On considère deux vecteurs $x, y \in P_d$. Pour décider si $x \prec / \prec_M / \prec_T y$, il ne faut connaître que les composantes strictement positives de x et de y .
- Il est possible donc de comparer deux vecteurs x et y de **tailles différentes** en rajoutant des composantes nulles à la fin du plus petit.
- Il semble donc naturel (au moins d'un point de vue mathématique) de considérer les ensembles suivants:

$$T_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} \mid x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_{<\infty} \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} \mid x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geq 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\},$$

où $P_{<\infty} = \bigcup_{d \geq 1} P_d$ est l'ensemble de **vecteurs de probabilités de support fini**.

Une observation importante

- On considère deux vecteurs $x, y \in P_d$. Pour décider si $x \prec / \prec_M / \prec_T y$, il ne faut connaître que les composantes strictement positives de x et de y .
- Il est possible donc de comparer deux vecteurs x et y de **tailles différentes** en rajoutant des composantes nulles à la fin du plus petit.
- Il semble donc naturel (au moins d'un point de vue mathématique) de considérer les ensembles suivants:

$$T_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} \mid x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_{<\infty} \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} \mid x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geq 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\},$$

où $P_{<\infty} = \bigcup_{d \geq 1} P_d$ est l'ensemble de **vecteurs de probabilités de support fini**.

- Pour $y \in P_d$, on a les égalités suivantes: $T_d(y) = T_{<\infty}(y) \cap P_d$ et $M_d(y) = M_{<\infty}(y) \cap P_d$.
- Par conséquence, pour des vecteurs y qui ne sont pas trop simples, les ensembles $T_{<\infty}(y)$ et $M_{<\infty}(y)$ ne sont pas fermés.
- On note par $\overline{T_{<\infty}(y)}$ et $\overline{M_{<\infty}(y)}$ la fermeture par rapport à la norme ℓ_1 , qui est la topologie la plus naturelle dans ce cadre.
- Pour tout d , on a les inclusions strictes suivantes:

$$\overline{T_d(y)} \subsetneq \overline{T_{<\infty}(y)} \cap P_d,$$
$$\overline{M_d(y)} \subsetneq \overline{M_{<\infty}(y)} \cap P_d.$$

Une observation importante - suite

- Pour $y \in P_d$, on a les égalités suivantes: $T_d(y) = T_{<\infty}(y) \cap P_d$ et $M_d(y) = M_{<\infty}(y) \cap P_d$.
- Par conséquence, pour des vecteurs y qui ne sont pas trop simples, les ensembles $T_{<\infty}(y)$ et $M_{<\infty}(y)$ ne sont pas fermés.
- On note par $\overline{T_{<\infty}(y)}$ et $\overline{M_{<\infty}(y)}$ la fermeture par rapport à la norme ℓ_1 , qui est la topologie la plus naturelle dans ce cadre.
- Pour tout d , on a les inclusions strictes suivantes:

$$\overline{T_d(y)} \subsetneq \overline{T_{<\infty}(y)} \cap P_d,$$

$$\overline{M_d(y)} \subsetneq \overline{M_{<\infty}(y)} \cap P_d.$$

- Pour $y \in P_d$, on a les égalités suivantes: $T_d(y) = T_{<\infty}(y) \cap P_d$ et $M_d(y) = M_{<\infty}(y) \cap P_d$.
- Par conséquence, pour des vecteurs y qui ne sont pas trop simples, les ensembles $T_{<\infty}(y)$ et $M_{<\infty}(y)$ ne sont pas fermés.
- On note par $\overline{T_{<\infty}(y)}$ et $\overline{M_{<\infty}(y)}$ la fermeture par rapport à la norme ℓ_1 , qui est la topologie la plus naturelle dans ce cadre.
- Pour tout d , on a les inclusions strictes suivantes:

$$\overline{T_d(y)} \subsetneq \overline{T_{<\infty}(y)} \cap P_d,$$

$$\overline{M_d(y)} \subsetneq \overline{M_{<\infty}(y)} \cap P_d.$$

- Pour $y \in P_d$, on a les égalités suivantes: $T_d(y) = T_{<\infty}(y) \cap P_d$ et $M_d(y) = M_{<\infty}(y) \cap P_d$.
- Par conséquence, pour des vecteurs y qui ne sont pas trop simples, les ensembles $T_{<\infty}(y)$ et $M_{<\infty}(y)$ ne sont pas fermés.
- On note par $\overline{T_{<\infty}(y)}$ et $\overline{M_{<\infty}(y)}$ la fermeture par rapport à la norme ℓ_1 , qui est la topologie la plus naturelle dans ce cadre.
- Pour tout d , on a les inclusions **strictes** suivantes:

$$\overline{T_d(y)} \subsetneq \overline{T_{<\infty}(y)} \cap P_d,$$
$$\overline{M_d(y)} \subsetneq \overline{M_{<\infty}(y)} \cap P_d.$$

Théorème

Soient $x, y \in P_{<\infty}$ deux vecteurs de probabilités. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1 $x \in \overline{M_{<\infty}(y)}$,
- 2 $x \in \overline{T_{<\infty}(y)}$,
- 3 $\forall p \geq 1, \|x\|_p \leq \|y\|_p$.

Rappel:

Conjecture (Nielsen)

Soit $y \in P_d$ un vecteur de probabilités. Alors $x \in P_d$ appartient à $\overline{T_d(y)}$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

- 1 Pour $p \geq 1$, $\|x\|_p \leq \|y\|_p$;
- 2 Pour $0 \leq p \leq 1$, $\|x\|_p \geq \|y\|_p$;
- 3 Pour $p \leq 0$, $\|x\|_p \geq \|y\|_p$.

Théorème

Soient $x, y \in P_{<\infty}$ deux vecteurs de probabilités. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1 $x \in \overline{M_{<\infty}(y)}$,
- 2 $x \in \overline{T_{<\infty}(y)}$,
- 3 $\forall p \geq 1, \|x\|_p \leq \|y\|_p$.

Rappel:

Conjecture (Nielsen)

Soit $y \in P_d$ un vecteur de probabilités. Alors $x \in P_d$ appartient à $\overline{T_d(y)}$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

- 1 Pour $p \geq 1$, $\|x\|_p \leq \|y\|_p$;
- 2 Pour $0 \leq p \leq 1$, $\|x\|_p \geq \|y\|_p$;
- 3 Pour $p \leq 0$, $\|x\|_p \geq \|y\|_p$.

Théorème

$$\overline{M_{<\infty}(y)} = \overline{T_{<\infty}(y)} = \{x \in P_{<\infty} \mid \forall p \geq 1, \|x\|_p \leq \|y\|_p\}.$$

- Les inégalités sur les normes ℓ_p peuvent être traduites en termes d'entropies de Rényi:

$$H_p(x) = \frac{\text{sgn}(p)}{p-1} \log_2 \left(\sum_{i=1}^d x_i^p \right).$$

- Soit $T'(y)$ l'ensemble des vecteurs ELOCC-dominés par y où on permet des catalyseurs de taille infinie. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)} = \overline{T'(y)}$.
- La partie la plus difficile du théorème est l'implication (3) \Rightarrow (1 ou 2). On construit explicitement des suites approximantes $x_n \rightarrow x$, avec $x_n \in T_{<\infty}$ et $x \in \overline{T_{<\infty}}$. Souvent, la taille des supports des vecteurs x_n converge vers l'infini.

Théorème

$$\overline{M_{<\infty}(y)} = \overline{T_{<\infty}(y)} = \{x \in P_{<\infty} \mid \forall p \geq 1, \|x\|_p \leq \|y\|_p\}.$$

- Les inégalités sur les normes ℓ_p peuvent être traduites en termes d'entropies de Rényi:

$$H_p(x) = \frac{\text{sgn}(p)}{p-1} \log_2 \left(\sum_{i=1}^d x_i^p \right).$$

- Soit $T'(y)$ l'ensemble des vecteurs ELOCC-dominés par y où on permet des catalyseurs de taille infinie. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)} = \overline{T'(y)}$.
- La partie la plus difficile du théorème est l'implication (3) \Rightarrow (1 ou 2). On construit explicitement des suites approximantes $x_n \rightarrow x$, avec $x_n \in T_{<\infty}$ et $x \in \overline{T_{<\infty}}$. Souvent, la taille des supports des vecteurs x_n converge vers l'infini.

Théorème

$$\overline{M_{<\infty}(y)} = \overline{T_{<\infty}(y)} = \{x \in P_{<\infty} \mid \forall p \geq 1, \|x\|_p \leq \|y\|_p\}.$$

- Les inégalités sur les normes ℓ_p peuvent être traduites en termes d'entropies de Rényi:

$$H_p(x) = \frac{\text{sgn}(p)}{p-1} \log_2 \left(\sum_{i=1}^d x_i^p \right).$$

- Soit $T'(y)$ l'ensemble des vecteurs ELOCC-dominés par y où on permet des catalyseurs de taille infinie. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)} = \overline{T'(y)}$.
- La partie la plus difficile du théorème est l'implication (3) \Rightarrow (1 ou 2). On construit explicitement des suites approximantes $x_n \rightarrow x$, avec $x_n \in T_{<\infty}$ et $x \in \overline{T_{<\infty}}$. Souvent, la taille des supports des vecteurs x_n converge vers l'infini.

Théorème

$$\overline{M_{<\infty}(y)} = \overline{T_{<\infty}(y)} = \{x \in P_{<\infty} \mid \forall p \geq 1, \|x\|_p \leq \|y\|_p\}.$$

- Les inégalités sur les normes ℓ_p peuvent être traduites en termes d'entropies de Rényi:

$$H_p(x) = \frac{\text{sgn}(p)}{p-1} \log_2 \left(\sum_{i=1}^d x_i^p \right).$$

- Soit $T'(y)$ l'ensemble des vecteurs ELOCC-dominés par y où on permet des catalyseurs de taille infinie. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)} = \overline{T'(y)}$.
- La partie la plus difficile du théorème est l'implication (3) \Rightarrow (1 ou 2). On construit explicitement des suites approximantes $x_n \rightarrow x$, avec $x_n \in T_{<\infty}$ et $x \in \overline{T_{<\infty}}$. Souvent, la taille des supports des vecteurs x_n converge vers l'infini.

- Utiliser les mêmes techniques pour prouver la conjecture de Nielsen dans son intégralité. Principal obstacle: on a besoin de travailler avec des vecteurs déficients \Rightarrow la taille des vecteurs approximants explose.
- Ne permettre que des vecteurs approximants de taille bornée:

Conjecture

Pour $y \in P_d$, soit $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ l'ensemble des vecteurs $x \in P_d$ tels qu'il existe une suite (x_n) de $T_{<\infty}(y)$ qui converge vers x , avec une borne uniforme sur les supports des x_n . Alors $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ est l'ensemble des vecteurs x qui vérifient les conditions (1) et (2) ($p \geq 0$) dans la conjecture de Nielsen.

- Utiliser les mêmes techniques pour prouver la conjecture de Nielsen dans son intégralité. Principal obstacle: on a besoin de travailler avec des vecteurs déficients \Rightarrow la taille des vecteurs approximants explose.
- Ne permettre que des vecteurs approximants de taille bornée:

Conjecture

Pour $y \in P_d$, soit $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ l'ensemble des vecteurs $x \in P_d$ tels qu'il existe une suite (x_n) de $T_{<\infty}(y)$ qui converge vers x , avec une borne uniforme sur les supports des x_n . Alors $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ est l'ensemble des vecteurs x qui vérifient les conditions (1) et (2) ($p \geq 0$) dans la conjecture de Nielsen.

- Utiliser les mêmes techniques pour prouver la conjecture de Nielsen dans son intégralité. Principal obstacle: on a besoin de travailler avec des vecteurs déficients \Rightarrow la taille des vecteurs approximants explose.
- Ne permettre que des vecteurs approximants de taille bornée:

Conjecture

Pour $y \in P_d$, soit $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ l'ensemble des vecteurs $x \in P_d$ tels qu'il existe une suite (x_n) de $T_{<\infty}(y)$ qui converge vers x , avec une borne uniforme sur les supports des x_n . Alors $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ est l'ensemble des vecteurs x qui vérifient les conditions (1) et (2) ($p \geq 0$) dans la conjecture de Nielsen.

- Utiliser les mêmes techniques pour prouver la conjecture de Nielsen dans son intégralité. Principal obstacle: on a besoin de travailler avec des vecteurs déficients \Rightarrow la taille des vecteurs approximants explose.
- Ne permettre que des vecteurs approximants de taille bornée:

Conjecture

Pour $y \in P_d$, soit $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ l'ensemble des vecteurs $x \in P_d$ tels qu'il existe une suite (x_n) de $T_{<\infty}(y)$ qui converge vers x , avec une borne uniforme sur les supports des x_n . Alors $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ est l'ensemble des vecteurs x qui vérifient les conditions (1) et (2) ($p \geq 0$) dans la conjecture de Nielsen.

- Utiliser les mêmes techniques pour prouver la conjecture de Nielsen dans son intégralité. Principal obstacle: on a besoin de travailler avec des vecteurs déficients \Rightarrow la taille des vecteurs approximants explose.
- Ne permettre que des vecteurs approximants de taille bornée:

Conjecture

Pour $y \in P_d$, soit $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ l'ensemble des vecteurs $x \in P_d$ tels qu'il existe une suite (x_n) de $T_{<\infty}(y)$ qui converge vers x , avec une borne uniforme sur les supports des x_n . Alors $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ est l'ensemble des vecteurs x qui vérifient les conditions (1) et (2) ($p \geq 0$) dans la conjecture de Nielsen.

Éléments de preuve

- A tout vecteur à composantes positives $x = (x_1, \dots, x_d)$ on associe la mesure $\mu_x = \sum_{i=1}^d x_i \delta_{\log x_i}$, où δ est la masse de Dirac et $0\delta_{\log 0} = 0$.
- Le produit tensoriel des vecteurs correspond à la convolution des mesures: $\mu_{x \otimes y} = \mu_x * \mu_y$.
- On étend la relation de domination aux vecteurs de \mathbf{R}^d avec des composantes positives qu'on note " \prec_w " (de la définition de \prec , on garde juste les $d - 1$ inégalités).

Proposition

Soient x et y des vecteurs de \mathbf{R}^d avec des composantes positives et μ_x et μ_y les mesures associées à x et à y . Si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mu_x[t, \infty) \leq \mu_y[t, \infty)$, alors $x \prec_w y$.

- A tout vecteur à composantes positives $x = (x_1, \dots, x_d)$ on associe la mesure $\mu_x = \sum_{i=1}^d x_i \delta_{\log x_i}$, où δ est la masse de Dirac et $0\delta_{\log 0} = 0$.
- Le produit tensoriel des vecteurs correspond à la convolution des mesures: $\mu_{x \otimes y} = \mu_x * \mu_y$.
- On étend la relation de domination aux vecteurs de \mathbf{R}^d avec des composantes positives qu'on note " \prec_w " (de la définition de \prec , on garde juste les $d - 1$ inégalités).

Proposition

Soient x et y des vecteurs de \mathbf{R}^d avec des composantes positives et μ_x et μ_y les mesures associées à x et à y . Si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mu_x[t, \infty) \leq \mu_y[t, \infty)$, alors $x \prec_w y$.

- A tout vecteur à composantes positives $x = (x_1, \dots, x_d)$ on associe la mesure $\mu_x = \sum_{i=1}^d x_i \delta_{\log x_i}$, où δ est la masse de Dirac et $0\delta_{\log 0} = 0$.
- Le produit tensoriel des vecteurs correspond à la convolution des mesures: $\mu_{x \otimes y} = \mu_x * \mu_y$.
- On étend la relation de domination aux vecteurs de \mathbf{R}^d avec des composantes positives qu'on note " \prec_w " (de la définition de \prec , on garde juste les $d - 1$ inégalités).

Proposition

Soient x et y des vecteurs de \mathbf{R}^d avec des composantes positives et μ_x et μ_y les mesures associées à x et à y . Si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mu_x[t, \infty) \leq \mu_y[t, \infty)$, alors $x \prec_w y$.

- A tout vecteur à composantes positives $x = (x_1, \dots, x_d)$ on associe la mesure $\mu_x = \sum_{i=1}^d x_i \delta_{\log x_i}$, où δ est la masse de Dirac et $0\delta_{\log 0} = 0$.
- Le produit tensoriel des vecteurs correspond à la convolution des mesures: $\mu_{x \otimes y} = \mu_x * \mu_y$.
- On étend la relation de domination aux vecteurs de \mathbf{R}^d avec des composantes positives qu'on note " \prec_w " (de la définition de \prec , on garde juste les $d - 1$ inégalités).

Proposition

Soient x et y des vecteurs de \mathbf{R}^d avec des composantes positives et μ_x et μ_y les mesures associées à x et à y . Si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mu_x[t, \infty) \leq \mu_y[t, \infty)$, alors $x \prec_w y$.

Le théorème des grandes déviations

- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-\infty, \infty[$. On définit sa transformée de log-Laplace par

$$\Lambda_X(\lambda) = \log \mathbf{E}e^{\lambda X}.$$

- La conjuguée convexe de Λ , appelée souvent transformée de Cramér, est définie par

$$\Lambda_X^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \lambda x - \Lambda_X(\lambda).$$

Théorème

Soit X une v.a. à valeurs dans $[-\infty, +\infty)$ telle que $\Lambda_X(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda \geq 0$. Soit (X_i) une suite de copies i.i.d. de X . Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n \geq nt) = \begin{cases} \log \mathbf{P}(X \neq -\infty) & \text{si } t \leq \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ -\Lambda_X^*(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème des grandes déviations

- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-\infty, \infty[$. On définit sa transformée de log-Laplace par

$$\Lambda_X(\lambda) = \log \mathbf{E}e^{\lambda X}.$$

- La conjuguée convexe de Λ , appelée souvent transformée de Cramér, est définie par

$$\Lambda_X^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \lambda x - \Lambda_X(\lambda).$$

Théorème

Soit X une v.a. à valeurs dans $[-\infty, +\infty)$ telle que $\Lambda_X(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda \geq 0$. Soit (X_i) une suite de copies i.i.d. de X . Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n \geq nt) = \begin{cases} \log \mathbf{P}(X \neq -\infty) & \text{si } t \leq \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ -\Lambda_X^*(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème des grandes déviations

- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-\infty, \infty[$. On définit sa transformée de log-Laplace par

$$\Lambda_X(\lambda) = \log \mathbf{E}e^{\lambda X}.$$

- La conjuguée convexe de Λ , appelée souvent transformée de Cramér, est définie par

$$\Lambda_X^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \lambda x - \Lambda_X(\lambda).$$

Théorème

Soit X une v.a. à valeurs dans $[-\infty, +\infty)$ telle que $\Lambda_X(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda \geq 0$. Soit (X_i) une suite de copies i.i.d. de X . Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n \geq nt) = \begin{cases} \log \mathbf{P}(X \neq -\infty) & \text{si } t \leq \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ -\Lambda_X^*(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme

Soient $x, y \in R^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

Esquisse de preuve

- S.p.d.g., on peut supposer $1 - p = \|x\|_1 < \|y\|_1 = 1$. On considère les mesures μ_x et μ_y associées à x et à y .
- On pose $\bar{\mu}_x = \mu_x + p\delta_{-\infty}$; c'est une mesure de probabilités.
- D'après la proposition liant les queues des v.a. à la relation de domination, il suffit de trouver n tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq nt) \leq \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geq nt),$$

où X_i (resp. Y_i) sont des v.a.i.i.d. de loi $\bar{\mu}_x$ (resp. μ_y).

Lemme

Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

Esquisse de preuve

- S.p.d.g., on peut supposer $1 - p = \|x\|_1 < \|y\|_1 = 1$. On considère les mesures μ_x et μ_y associées à x et à y .
- On pose $\bar{\mu}_x = \mu_x + p\delta_{-\infty}$; c'est une mesure de probabilités.
- D'après la proposition liant les queues des v.a. à la relation de domination, il suffit de trouver n tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq nt) \leq \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geq nt),$$

où X_i (resp. Y_i) sont des v.a.i.i.d. de loi $\bar{\mu}_x$ (resp. μ_y).

Lemme

Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

Esquisse de preuve

- S.p.d.g., on peut supposer $1 - p = \|x\|_1 < \|y\|_1 = 1$. On considère les mesures μ_x et μ_y associées à x et à y .
- On pose $\bar{\mu}_x = \mu_x + p\delta_{-\infty}$; c'est une mesure de probabilités.
- D'après la proposition liant les queues des v.a. à la relation de domination, il suffit de trouver n tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq nt) \leq \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geq nt),$$

où X_i (resp. Y_i) sont des v.a.i.i.d. de loi $\bar{\mu}_x$ (resp. μ_y).

Lemme

Soient $x, y \in R^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

Esquisse de preuve

- S.p.d.g., on peut supposer $1 - p = \|x\|_1 < \|y\|_1 = 1$. On considère les mesures μ_x et μ_y associées à x et à y .
- On pose $\bar{\mu}_x = \mu_x + p\delta_{-\infty}$; c'est une mesure de probabilités.
- D'après la proposition liant les queues des v.a. à la relation de domination, il suffit de trouver n tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq nt) \leq \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geq nt),$$

où X_i (resp. Y_i) sont des v.a.i.i.d. de loi $\bar{\mu}_x$ (resp. μ_y).

- Soient $f_n(t) = \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n \geq nt)^{1/n}$ et $g_n(t) = \mathbf{P}(Y_1 + \dots + Y_n \geq nt)^{1/n}$. D'après le théorème des grandes déviations, on a

$$f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } t \leq \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ e^{-\Lambda_X^*(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \mathbf{E}(Y) \\ e^{-\Lambda_Y^*(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Mais $\forall \lambda \geq 0, \Lambda_X(\lambda) = \log \|x\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$ et $\Lambda_Y(\lambda) = \log \|y\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$.
- Le supremum dans la définition de $\Lambda_Y^*(t)$ est atteint, pour $\mathbf{E}Y \leq t \leq \text{esssup } Y$, en un point $\lambda \geq 0$.
- On conclut en utilisant un résultat de convergence uniforme.

- Soient $f_n(t) = \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n \geq nt)^{1/n}$ et $g_n(t) = \mathbf{P}(Y_1 + \dots + Y_n \geq nt)^{1/n}$. D'après le théorème des grandes déviations, on a

$$f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } t \leq \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ e^{-\Lambda_X^*(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \mathbf{E}(Y) \\ e^{-\Lambda_Y^*(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Mais $\forall \lambda \geq 0, \Lambda_X(\lambda) = \log \|x\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$ et $\Lambda_Y(\lambda) = \log \|y\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$.
- Le supremum dans la définition de $\Lambda_Y^*(t)$ est atteint, pour $\mathbf{E}Y \leq t \leq \text{esssup } Y$, en un point $\lambda \geq 0$.
- On conclut en utilisant un résultat de convergence uniforme.

- Soient $f_n(t) = \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n \geq nt)^{1/n}$ et $g_n(t) = \mathbf{P}(Y_1 + \dots + Y_n \geq nt)^{1/n}$. D'après le théorème des grandes déviations, on a

$$f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } t \leq \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ e^{-\Lambda_X^*(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \mathbf{E}(Y) \\ e^{-\Lambda_Y^*(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Mais $\forall \lambda \geq 0, \Lambda_X(\lambda) = \log \|x\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$ et $\Lambda_Y(\lambda) = \log \|y\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$.
- Le supremum dans la définition de $\Lambda_Y^*(t)$ est atteint, pour $\mathbf{E}Y \leq t \leq \text{esssup } Y$, en un point $\lambda \geq 0$.
- On conclut en utilisant un résultat de convergence uniforme.

- Soient $f_n(t) = \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n \geq nt)^{1/n}$ et $g_n(t) = \mathbf{P}(Y_1 + \dots + Y_n \geq nt)^{1/n}$. D'après le théorème des grandes déviations, on a

$$f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } t \leq \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ e^{-\Lambda_X^*(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \mathbf{E}(Y) \\ e^{-\Lambda_Y^*(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Mais $\forall \lambda \geq 0, \Lambda_X(\lambda) = \log \|x\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$ et $\Lambda_Y(\lambda) = \log \|y\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$.
- Le supremum dans la définition de $\Lambda_Y^*(t)$ est atteint, pour $\mathbf{E}Y \leq t \leq \text{esssup } Y$, en un point $\lambda \geq 0$.
- On conclut en utilisant un résultat de convergence uniforme.

Lemme (clé)

Soient $x, y \in R^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

- Soient x, y des vecteurs de probabilité tels que $\forall 1 \leq p < \infty, \|x\|_p \leq \|y\|_p$ et soit $\varepsilon > 0$. On construit le vecteur x_ε en enlevant à x la masse ε (uniformement sur toutes les composantes).
- x_ε et y vérifient les hypothèses du lemme, donc il existe n tel que $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$. Il ne reste qu'à rajouter la masse ε à x_ε de façon que la relation $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$ reste vraie.
- Cela ne peut pas se faire en rajoutant tout en une seule fois; on risque de perturber les plus petites composantes de $x_\varepsilon^{\otimes n}$.
- L'idée c'est d'ajouter k petites composantes ε/k à la fin de x_ε .
Inconvénient: k dépend de ε .

Lemme (clé)

Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

- Soient x, y des vecteurs de probabilité tels que $\forall 1 \leq p < \infty$, $\|x\|_p \leq \|y\|_p$ et soit $\varepsilon > 0$. On construit le vecteur x_ε en enlevant à x la masse ε (uniformement sur toutes les composantes).
- x_ε et y vérifient les hypothèses du lemme, donc il existe n tel que $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$. Il ne reste qu'à rajouter la masse ε à x_ε de façon que la relation $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$ reste vraie.
- Cela ne peut pas se faire en rajoutant tout en une seule fois; on risque de perturber les plus petites composantes de $x_\varepsilon^{\otimes n}$.
- L'idée c'est d'ajouter k petites composantes ε/k à la fin de x_ε .
Inconvénient: k dépend de ε .

Lemme (clé)

Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

- Soient x, y des vecteurs de probabilité tels que $\forall 1 \leq p < \infty$, $\|x\|_p \leq \|y\|_p$ et soit $\varepsilon > 0$. On construit le vecteur x_ε en enlevant à x la masse ε (uniformement sur toutes les composantes).
- x_ε et y vérifient les hypothèses du lemme, donc il existe n tel que $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$. Il ne reste qu'à rajouter la masse ε à x_ε de façon que la relation $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$ reste vraie.
- Cela ne peut pas se faire en rajoutant tout en une seule fois; on risque de perturber les plus petites composantes de $x_\varepsilon^{\otimes n}$.
- L'idée c'est d'ajouter k petites composantes ε/k à la fin de x_ε .
Inconvénient: k dépend de ε .

Lemme (clé)

Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

- Soient x, y des vecteurs de probabilité tels que $\forall 1 \leq p < \infty$, $\|x\|_p \leq \|y\|_p$ et soit $\varepsilon > 0$. On construit le vecteur x_ε en enlevant à x la masse ε (uniformement sur toutes les composantes).
- x_ε et y vérifient les hypothèses du lemme, donc il existe n tel que $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$. Il ne reste qu'à rajouter la masse ε à x_ε de façon que la relation $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$ reste vraie.
- Cela ne peut pas se faire en rajoutant tout en une seule fois; on risque de perturber les plus petites composantes de $x_\varepsilon^{\otimes n}$.
- L'idée c'est d'ajouter k petites composantes ε/k à la fin de x_ε .
Inconvénient: k dépend de ε .

Lemme (clé)

Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

- Soient x, y des vecteurs de probabilité tels que $\forall 1 \leq p < \infty, \|x\|_p \leq \|y\|_p$ et soit $\varepsilon > 0$. On construit le vecteur x_ε en enlevant à x la masse ε (uniformement sur toutes les composantes).
- x_ε et y vérifient les hypothèses du lemme, donc il existe n tel que $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$. Il ne reste qu'à rajouter la masse ε à x_ε de façon que la relation $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$ reste vraie.
- Cela ne peut pas se faire en rajoutant tout en une seule fois; on risque de perturber les plus petites composantes de $x_\varepsilon^{\otimes n}$.
- L'idée c'est d'ajouter k petites composantes ε/k à la fin de x_ε .
Inconvénient: k dépend de ε .

Fin

Questions ?