Canaux quantiques aléatoires et le problème d'additivité

Ion Nechita
travail en collaboration avec Benoît Collins

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

Toulouse, 25 Juin 2009

Canaux quantiques
et la conjecture d'additivité

États quantiques

Définition

A un système quantique on associe un espace de Hilbert $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$. L'état d'un tel système est décrit par un opérateur positif de trace 1 $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{M}_n^{1,+}(\mathbb{C})$, dit matrice densité. Un état est dit pur s'il est de rang 1: $\rho = P_x$, pour un $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$.

États quantiques

Définition

A un système quantique on associe un espace de Hilbert $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$. L'état d'un tel système est décrit par un opérateur positif de trace 1 $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{M}_n^{1,+}(\mathbb{C})$, dit matrice densité. Un état est dit pur s'il est de rang 1: $\rho = P_x$, pour un $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$.

- Système composé $\rightsquigarrow$ produit tensoriel $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

États quantiques

Définition

A un système quantique on associe un espace de Hilbert $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$. L'état d'un tel système est décrit par un opérateur positif de trace 1 $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{M}_n^{1,+}(\mathbb{C})$, dit matrice densité. Un état est dit pur s'il est de rang 1: $\rho = P_x$, pour un $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$.

- Système composé $\rightsquigarrow$ produit tensoriel $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.
- Accès à un sous système $\rightsquigarrow$ trace partielle

États quantiques

Définition

A un système quantique on associe un espace de Hilbert $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$. L'état d'un tel système est décrit par un opérateur positif de trace 1 $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{M}_n^{1,+}(\mathbb{C})$, dit matrice densité. Un état est dit pur s'il est de rang 1: $\rho = P_x$, pour un $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$.

- Système composé $\rightsquigarrow$ produit tensoriel $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.
- Accès à un sous système $\rightsquigarrow$ trace partielle : pour $\rho_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$,

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_2[\rho_{12}] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1).$$

La trace partielle $\mathrm{Tr}_2[\cdot]$ est l'application duale à la dilatation

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \ni X \mapsto X \otimes \mathrm{I}_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2).$$

États quantiques

Définition

A un système quantique on associe un espace de Hilbert $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$. L'état d'un tel système est décrit par un opérateur positif de trace 1 $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{M}_n^{1,+}(\mathbb{C})$, dit matrice densité. Un état est dit pur s'il est de rang 1: $\rho = P_x$, pour un $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$.

- Système composé $\rightsquigarrow$ produit tensoriel $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.
- Accès à un sous système $\rightsquigarrow$ trace partielle : pour $\rho_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$,

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_2[\rho_{12}] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1).$$

  La trace partielle $\mathrm{Tr}_2[\cdot]$ est l'application duale à la dilatation

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \ni X \mapsto X \otimes \mathrm{I}_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2).$$

- Un état pur $x \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ est dit intriqué s'il n'existe pas $x_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$ tels que

$$x = x_1 \otimes x_2.$$

Canaux quantiques

Définition

Un canal quantique est une application linéaire $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *complètement positive* (i.e. $\Phi \otimes \mathrm{I}_k$ positive $\forall k$) qui *préserve la trace*.

Définition

Un canal quantique est une application linéaire $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *complètement positive* (i.e. $\Phi \otimes \mathrm{I}_k$ positive $\forall k$) qui *préserve la trace*.

Proposition

Une application linéaire $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un canal quantique ssi l'une des deux assertions suivantes est vérifiée:

1. *Dilatation de Stinespring: pour un $k \in \mathbb{N}$, il existe une matrice densité $\beta \in \mathcal{M}_k^{1,+}(\mathbb{C})$ et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{U}(nk)$ tels que*

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_k \left[U(X \otimes \beta) U^* \right], \quad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Définition

Un canal quantique est une application linéaire $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *complètement positive* (i.e. $\Phi \otimes \mathrm{I}_k$ positive $\forall k$) qui *préserve la trace*.

Proposition

Une application linéaire $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un canal quantique ssi l'une des deux assertions suivantes est vérifiée:

1. *Dilatation de Stinespring: pour un $k \in \mathbb{N}$, il existe une matrice densité $\beta \in \mathcal{M}_k^{1,+}(\mathbb{C})$ et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{U}(nk)$ tels que*

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_k \left[U(X \otimes \beta)U^*\right], \quad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

2. *Décomposition de Kraus: il existe k matrices $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que*

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{k} L_i X L_i^*, \quad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \textit{et} \quad \sum_{i=1}^{k} L_i^* L_i = \mathrm{I}_n\,.$$

Exemples

- Pour tout $U \in \mathcal{U}(n)$, on définit la conjugaison unitaire
$$\Phi_U(X) = UXU^*.$$
- Le canal identité $\Phi_{\mathrm{I}}(X) = X$.

Exemples

- Pour tout $U \in \mathcal{U}(n)$, on définit la conjugaison unitaire

$$\Phi_U(X) = UXU^*.$$

- Le canal identité $\Phi_{\mathrm{I}}(X) = X$.
- Le canal dépolarisant $\Phi_{\mathrm{dep}} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est défini par

$$\Phi_{\mathrm{dep}}(X) = \mathrm{Tr}(X)\frac{\mathrm{I}_n}{n}.$$

Exemples

- Pour tout $U \in \mathcal{U}(n)$, on définit la conjugaison unitaire

$$\Phi_U(X) = UXU^*.$$

- Le canal identité $\Phi_{\mathrm{I}}(X) = X$.
- Le canal dépolarisant $\Phi_{\mathrm{dep}} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est défini par

$$\Phi_{\mathrm{dep}}(X) = \mathrm{Tr}(X)\frac{\mathrm{I}_n}{n}.$$

- L'application transposition

$$X \mapsto X^\top$$

n'est pas complètement positive.

Exemples

- Pour tout $U \in \mathcal{U}(n)$, on définit la conjugaison unitaire

$$\Phi_U(X) = UXU^*.$$

- Le canal identité $\Phi_{\mathrm{I}}(X) = X$.
- Le canal dépolarisant $\Phi_{\mathrm{dep}} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est défini par

$$\Phi_{\mathrm{dep}}(X) = \mathrm{Tr}(X)\frac{\mathrm{I}_n}{n}.$$

- L'application transposition

$$X \mapsto X^\top$$

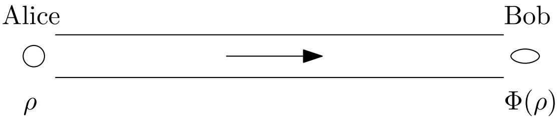
n'est pas complètement positive. En revanche, pour tout $\frac{-1}{n-1} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n+1}$, l'application

$$X \mapsto tX^\top + (1-t)\,\mathrm{Tr}(X)\frac{\mathrm{I}_n}{n}$$

est un canal quantique.

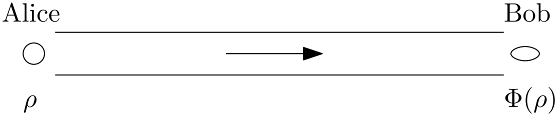
Transmission de l'information et l'EMS

- Φ modélise un canal de communication entre deux parties, Alice et Bob



Transmission de l'information et l'EMS

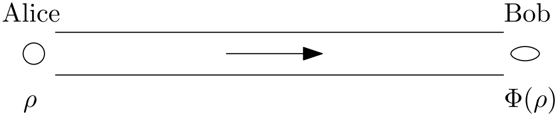
- Φ modélise un canal de communication entre deux parties, Alice et Bob



- Exemple 1: Conjugaison unitaire $\Phi_U(\rho) = U\rho U^*$ $\rightsquigarrow$ Bob peut "inverser" le canal et retrouver l'état ρ envoyé par Alice.

Transmission de l'information et l'EMS

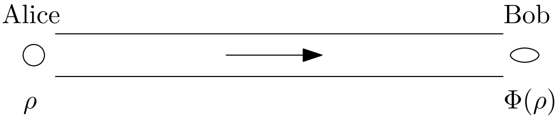
- Φ modélise un canal de communication entre deux parties, Alice et Bob



- Exemple 1: Conjugaison unitaire $\Phi_U(\rho) = U\rho U^*$ $\rightsquigarrow$ Bob peut “inverser” le canal et retrouver l'état ρ envoyé par Alice.
- Exemple 2: Canal dépolarisant $\Phi_{\text{dep}}(\rho) = \mathrm{I}_n\,/n$ $\rightsquigarrow$ Bob ne peut rien savoir sur l'état initial ρ.

Transmission de l'information et l'EMS

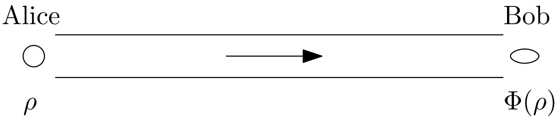
- Φ modélise un canal de communication entre deux parties, Alice et Bob



- Exemple 1: Conjugaison unitaire $\Phi_U(\rho) = U\rho U^*$ $\rightsquigarrow$ Bob peut "inverser" le canal et retrouver l'état ρ envoyé par Alice.
- Exemple 2: Canal dépolarisant $\Phi_{\mathrm{dep}}(\rho) = \mathrm{I}_n/n$ $\rightsquigarrow$ Bob ne peut rien savoir sur l'état initial ρ.
- Peut-on quantifier la capacité (de transmettre l'information classique) d'un canal quantique ?

Transmission de l'information et l'EMS

- Φ modélise un canal de communication entre deux parties, Alice et Bob



- Exemple 1: Conjugaison unitaire $\Phi_U(\rho) = U\rho U^* \rightsquigarrow$ Bob peut "inverser" le canal et retrouver l'état ρ envoyé par Alice.
- Exemple 2: Canal dépolarisant $\Phi_{\text{dep}}(\rho) = \mathrm{I}_n\,/n \rightsquigarrow$ Bob ne peut rien savoir sur l'état initial ρ.
- Peut-on quantifier la capacité (de transmettre l'information classique) d'un canal quantique ?

Définition

Pour $p \geqslant 1$, on définit la p-Entropie Minimale de Sortie d'un canal quantique $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$H^p_{\min}(\Phi) = \min_{\rho \in \mathcal{M}_n^{1,+}(\mathbb{C})} H^p(\Phi(\rho)).$$

Entropies de Rényi

- Pour $p \geqslant 1$, la p-entropie de Rényi d'un vecteur de probabilités $x \in \mathbb{R}^n$ ($x_i \geqslant 0$ et $\sum_i x_i = 1$) est définie par

$$H^p(x) = \frac{1}{1-p} \log \sum_{i=1}^{n} x_i^p;$$

$$H(x) = H^1(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i.$$

Entropies de Rényi

- Pour $p \geqslant 1$, la p-entropie de Rényi d'un vecteur de probabilités $x \in \mathbb{R}^n$ ($x_i \geqslant 0$ et $\sum_i x_i = 1$) est définie par

$$H^p(x) = \frac{1}{1-p} \log \sum_{i=1}^{n} x_i^p;$$

$$H(x) = H^1(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i.$$

- On étend ces définition par le calcul fonctionnel aux matrices densités:

$$H^p(\rho) = \frac{1}{1-p} \log \operatorname{Tr} \rho^p;$$

$$H(\rho) = H^1(\rho) = -\operatorname{Tr} \rho \log \rho.$$

Entropies de Rényi

- Pour $p \geqslant 1$, la p-entropie de Rényi d'un vecteur de probabilités $x \in \mathbb{R}^n$ ($x_i \geqslant 0$ et $\sum_i x_i = 1$) est définie par

$$H^p(x) = \frac{1}{1-p} \log \sum_{i=1}^{n} x_i^p;$$

$$H(x) = H^1(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i.$$

- On étend ces définition par le calcul fonctionnel aux matrices densités:

$$H^p(\rho) = \frac{1}{1-p} \log \operatorname{Tr} \rho^p;$$

$$H(\rho) = H^1(\rho) = -\operatorname{Tr} \rho \log \rho.$$

- Pour tout $p \geqslant 1$ et pour toute matrice densité $\rho \in \mathcal{M}_n^{1,+}(\mathbb{C})$,

$$0 \leqslant H^p(\rho) \leqslant \log n.$$

Entropies de Rényi

- Pour $p \geqslant 1$, la p-entropie de Rényi d'un vecteur de probabilités $x \in \mathbb{R}^n$ ($x_i \geqslant 0$ et $\sum_i x_i = 1$) est définie par

$$H^p(x) = \frac{1}{1-p} \log \sum_{i=1}^{n} x_i^p;$$
$$H(x) = H^1(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i.$$

- On étend ces définition par le calcul fonctionnel aux matrices densités:

$$H^p(\rho) = \frac{1}{1-p} \log \operatorname{Tr} \rho^p;$$
$$H(\rho) = H^1(\rho) = -\operatorname{Tr} \rho \log \rho.$$

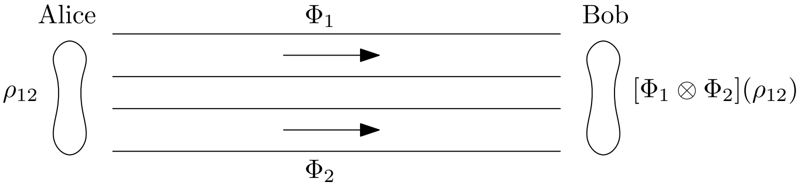
- Pour tout $p \geqslant 1$ et pour toute matrice densité $\rho \in \mathcal{M}_n^{1,+}(\mathbb{C})$,

$$0 \leqslant H^p(\rho) \leqslant \log n.$$

- On a: $H^p_{\min}(\Phi_U) = 0$ et $H^p_{\min}(\Phi_{\text{dep}}) = \log n$.

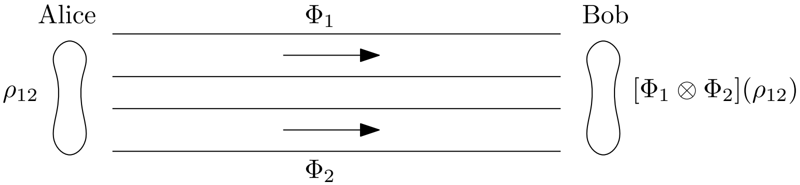
Additivité de l'EMS

- Alice et Bob ont à leur disposition deux canaux en parallèle, Φ_1 et Φ_2



Additivité de l'EMS

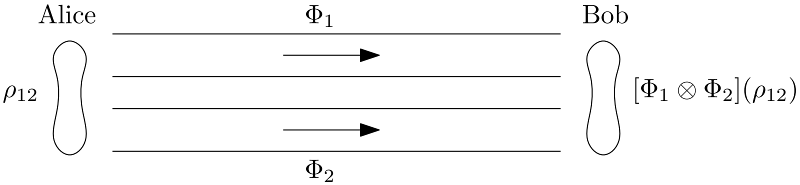
- Alice et Bob ont à leur disposition deux canaux en parallèle, Φ_1 et Φ_2



- Si $\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2$, alors

$$[\Phi_1 \otimes \Phi_2](\rho_1 \otimes \rho_2) = \Phi_1(\rho_1) \otimes \Phi_2(\rho_2),$$

- Alice et Bob ont à leur disposition deux canaux en parallèle, Φ_1 et Φ_2



- Si $\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2$, alors

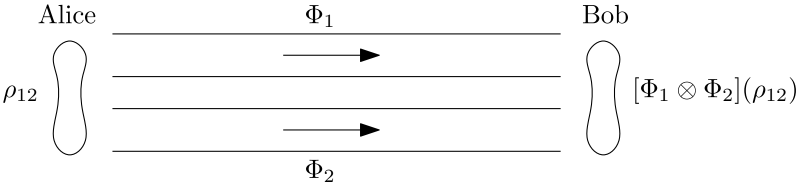
$$[\Phi_1 \otimes \Phi_2](\rho_1 \otimes \rho_2) = \Phi_1(\rho_1) \otimes \Phi_2(\rho_2),$$

et donc

$$H^p_{\min}(\Phi_1 \otimes \Phi_2) \leqslant H^p_{\min}(\Phi_1) + H^p_{\min}(\Phi_2).$$

Additivité de l'EMS

- Alice et Bob ont à leur disposition deux canaux en parallèle, Φ_1 et Φ_2



- Si $\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2$, alors

$$[\Phi_1 \otimes \Phi_2](\rho_1 \otimes \rho_2) = \Phi_1(\rho_1) \otimes \Phi_2(\rho_2),$$

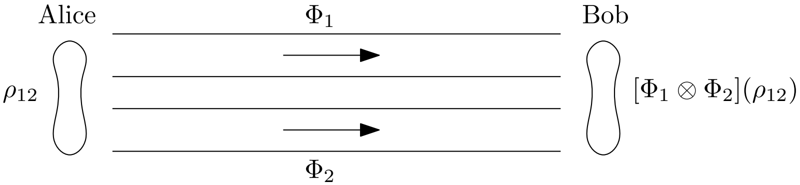
et donc

$$H^p_{\min}(\Phi_1 \otimes \Phi_2) \leqslant H^p_{\min}(\Phi_1) + H^p_{\min}(\Phi_2).$$

- A-t-on égalité ?

Additivité de l'EMS

- Alice et Bob ont à leur disposition deux canaux en parallèle, Φ_1 et Φ_2



- Si $\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2$, alors

$$[\Phi_1 \otimes \Phi_2](\rho_1 \otimes \rho_2) = \Phi_1(\rho_1) \otimes \Phi_2(\rho_2),$$

  et donc

$$H^p_{\min}(\Phi_1 \otimes \Phi_2) \leqslant H^p_{\min}(\Phi_1) + H^p_{\min}(\Phi_2).$$

- A-t-on égalité ? Autrement dit, peut-on faire mieux avec des états ρ_{12} intriqués?

Conjecture de Holevo: historique

- ['98] Conjecture de Holevo: pour tous canaux $\Phi_{1,2}$,

$$H^1_{\min}(\Phi_1 \otimes \Phi_2) = H^1_{\min}(\Phi_1) + H^1_{\min}(\Phi_2).$$

Ça serait une conséquence de l'additivité pour $H^p_{\min}$, pour p proche de 1.

Conjecture de Holevo: historique

- ['98] Conjecture de Holevo: pour tous canaux $\Phi_{1,2}$,

$$H^1_{\min}(\Phi_1 \otimes \Phi_2) = H^1_{\min}(\Phi_1) + H^1_{\min}(\Phi_2).$$

  Ça serait une conséquence de l'additivité pour $H^p_{\min}$, pour p proche de 1.

- ['02] Werner & Holevo: contre exemple pour $p > 4.79$. Canal explicite

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{n-1}(\mathrm{I}_n - X^\top).$$

Conjecture de Holevo: historique

- ['98] Conjecture de Holevo: pour tous canaux $\Phi_{1,2}$,

$$H^1_{\min}(\Phi_1 \otimes \Phi_2) = H^1_{\min}(\Phi_1) + H^1_{\min}(\Phi_2).$$

  Ça serait une conséquence de l'additivité pour $H^p_{\min}$, pour p proche de 1.

- ['02] Werner & Holevo: contre exemple pour $p > 4.79$. Canal explicite

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{n-1}(\mathrm{I}_n - X^\top).$$

- ['08] Hayden & Winter: contre exemple aléatoire pour $p > 1$.

Conjecture de Holevo: historique

- ['98] Conjecture de Holevo: pour tous canaux $\Phi_{1,2}$,

$$H^1_{\min}(\Phi_1 \otimes \Phi_2) = H^1_{\min}(\Phi_1) + H^1_{\min}(\Phi_2).$$

  Ça serait une conséquence de l'additivité pour $H^p_{\min}$, pour p proche de 1.

- ['02] Werner & Holevo: contre exemple pour $p > 4.79$. Canal explicite

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{n-1}(\mathrm{I}_n - X^\top).$$

- ['08] Hayden & Winter: contre exemple aléatoire pour $p > 1$.
- ['09] Hastings: contre exemple aléatoire (modèle différent du précédent) pour $p = 1$.

Conjecture de Holevo: historique

- ['98] Conjecture de Holevo: pour tous canaux $\Phi_{1,2}$,

$$H^1_{\min}(\Phi_1 \otimes \Phi_2) = H^1_{\min}(\Phi_1) + H^1_{\min}(\Phi_2).$$

  Ça serait une conséquence de l'additivité pour $H^p_{\min}$, pour p proche de 1.
- ['02] Werner & Holevo: contre exemple pour $p > 4.79$. Canal explicite

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{n-1}(\mathrm{I}_n - X^\top).$$

- ['08] Hayden & Winter: contre exemple aléatoire pour $p > 1$.
- ['09] Hastings: contre exemple aléatoire (modèle différent du précédent) pour $p = 1$.

- Collins & N. : analyse approfondie du modèle de Hayden + simplifications importantes + amélioration des bornes.

Un contre exemple aléatoire

Canaux quantiques aléatoires

- Fixons deux entiers $n, k \geqslant 2$ et un vecteur unité $y \in \mathbb{C}^k$. A toute matrice unitaire $U \in \mathcal{U}(nk)$, on associe le canal

$$\Phi^U(X) = \mathrm{Tr}_k \left[U(X \otimes P_y) U^* \right].$$

Canaux quantiques aléatoires

- Fixons deux entiers $n, k \geqslant 2$ et un vecteur unité $y \in \mathbb{C}^k$. A toute matrice unitaire $U \in \mathcal{U}(nk)$, on associe le canal

$$\Phi^U(X) = \mathrm{Tr}_k \left[U(X \otimes P_y) U^* \right].$$

- Si U est une matrice unitaire aléatoire de Haar, on obtient une v.a. à valeurs dans les canaux quantiques

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(nk) &\to \mathrm{End}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \\ U &\mapsto \Phi^U. \end{aligned}$$

Canaux quantiques aléatoires

- Fixons deux entiers $n, k \geqslant 2$ et un vecteur unité $y \in \mathbb{C}^k$. A toute matrice unitaire $U \in \mathcal{U}(nk)$, on associe le canal

$$\Phi^U(X) = \mathrm{Tr}_k \left[U(X \otimes P_y) U^* \right].$$

- Si U est une matrice unitaire aléatoire de Haar, on obtient une v.a. à valeurs dans les canaux quantiques

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(nk) &\to \mathrm{End}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \\ U &\mapsto \Phi^U. \end{aligned}$$

- La distribution de Φ ne dépend pas du choix particulier du vecteur y.

Le contre exemple $(p > 1)$

- Prendre $\Phi_1 = \Phi^U$ et $\Phi_2 = \Phi^{\overline{U}} = \overline{\Phi_1}$.

Le contre exemple ($p > 1$)

- Prendre $\Phi_1 = \Phi^U$ et $\Phi_2 = \Phi^{\overline{U}} = \overline{\Phi_1}$.

Théorème (Hayden & Winter)

Presque sûrement, lorsque n et $k \to \infty$, le couple (Φ_1, Φ_2) fournit un contre exemple à la conjecture d'additivité de la p-EMS.

Le contre exemple ($p > 1$)

- Prendre $\Phi_1 = \Phi^U$ et $\Phi_2 = \Phi^{\overline{U}} = \overline{\Phi_1}$.

Théorème (Hayden & Winter)

Presque sûrement, lorsque n et $k \to \infty$, le couple (Φ_1, Φ_2) fournit un contre exemple à la conjecture d'additivité de la p-EMS.

Théorème (Collins & N.)

Pour k assez grand, presque sûrement, lorsque $n \to \infty$, le couple (Φ_1, Φ_2) fournit un contre exemple à la conjecture d'additivité de la p-EMS.

Le contre exemple $(p > 1)$

- Prendre $\Phi_1 = \Phi^U$ et $\Phi_2 = \Phi^{\overline{U}} = \overline{\Phi_1}$.

Théorème (Hayden & Winter)

Presque sûrement, lorsque n et $k \to \infty$, le couple (Φ_1, Φ_2) fournit un contre exemple à la conjecture d'additivité de la p-EMS.

Théorème (Collins & N.)

Pour k assez grand, presque sûrement, lorsque $n \to \infty$, le couple (Φ_1, Φ_2) fournit un contre exemple à la conjecture d'additivité de la p-EMS.

- Preuve en deux étapes:

Le contre exemple ($p > 1$)

- Prendre $\Phi_1 = \Phi^U$ et $\Phi_2 = \Phi^{\overline{U}} = \overline{\Phi_1}$.

Théorème (Hayden & Winter)

Presque sûrement, lorsque n et $k \to \infty$, le couple (Φ_1, Φ_2) fournit un contre exemple à la conjecture d'additivité de la p-EMS.

Théorème (Collins & N.)

Pour k assez grand, presque sûrement, lorsque $n \to \infty$, le couple (Φ_1, Φ_2) fournit un contre exemple à la conjecture d'additivité de la p-EMS.

- Preuve en deux étapes:
  1. Pour un état particulier à l'entrée X_{12}, obtenir une borne sup pour le bi-canal:

$$H^p_{\min}(\Phi \otimes \overline{\Phi}) \leqslant H^p\left([\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})\right);$$

Le contre exemple ($p > 1$)

- Prendre $\Phi_1 = \Phi^U$ et $\Phi_2 = \Phi^{\overline{U}} = \overline{\Phi_1}$.

Théorème (Hayden & Winter)

Presque sûrement, lorsque n et $k \to \infty$, le couple (Φ_1, Φ_2) fournit un contre exemple à la conjecture d'additivité de la p-EMS.

Théorème (Collins & N.)

Pour k assez grand, presque sûrement, lorsque $n \to \infty$, le couple (Φ_1, Φ_2) fournit un contre exemple à la conjecture d'additivité de la p-EMS.

- Preuve en deux étapes:
  1. Pour un état particulier à l'entrée X_{12}, obtenir une borne sup pour le bi-canal:
  $$H^p_{\min}(\Phi \otimes \overline{\Phi}) \leqslant H^p\left([\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})\right);$$
  2. Borne inf pour $H^p_{\min}(\Phi) = H^p_{\min}(\overline{\Phi})$.

Le contre exemple ($p > 1$)

- Prendre $\Phi_1 = \Phi^U$ et $\Phi_2 = \Phi^{\overline{U}} = \overline{\Phi_1}$.

Théorème (Hayden & Winter)

Presque sûrement, lorsque n et $k \to \infty$, le couple (Φ_1, Φ_2) fournit un contre exemple à la conjecture d'additivité de la p-EMS.

Théorème (Collins & N.)

Pour k assez grand, presque sûrement, lorsque $n \to \infty$, le couple (Φ_1, Φ_2) fournit un contre exemple à la conjecture d'additivité de la p-EMS.

- Preuve en deux étapes:
  1. Pour un état particulier à l'entrée X_{12}, obtenir une borne sup pour le bi-canal:
  $$H^p_{\min}(\Phi \otimes \overline{\Phi}) \leqslant H^p\left([\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})\right);$$
  2. Borne inf pour $H^p_{\min}(\Phi) = H^p_{\min}(\overline{\Phi})$.
- Conclusion: $H^p_{\min}(\Phi \otimes \overline{\Phi}) < H^p_{\min}(\Phi) + H^p_{\min}(\overline{\Phi}) = 2H^p_{\min}(\Phi)$.

Borne pour le bi-canal

Choix de l'état à l'entrée

- Les états produits $X_{12} = X_1 \otimes X_2$ ne sont pas intéressants $\rightsquigarrow$ états intriqués.

Choix de l'état à l'entrée

- Les états produits $X_{12} = X_1 \otimes X_2$ ne sont pas intéressants $\rightsquigarrow$ états intriqués.
- On choisit l'état maximalement intriqué $X_{12} = P_E$, où

$$E = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n.$$

Choix de l'état à l'entrée

- Les états produits $X_{12} = X_1 \otimes X_2$ ne sont pas intéressants $\rightsquigarrow$ états intriqués.
- On choisit l'état maximalement intriqué $X_{12} = P_E$, où

$$E = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n.$$

Proposition (Hayden & Winter)

La matrice $[\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})$ *admet une valeur propre plus grande que* $1/k$.

Choix de l'état à l'entrée

- Les états produits $X_{12} = X_1 \otimes X_2$ ne sont pas intéressants $\rightsquigarrow$ états intriqués.
- On choisit l'état maximalement intriqué $X_{12} = P_E$, où

$$E = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n.$$

Proposition (Hayden & Winter)

La matrice $[\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})$ admet une valeur propre plus grande que $1/k$.

Proposition (Collins & N.)

Pour tout k, presque sûrement lorsque $n \to \infty$, les valeurs propres non-nulles de $[\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})$ sont

$$\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3}, \underbrace{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3}, \ldots, \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3}}_{k^2-1 \text{ fois}} \right).$$

Preuve

- Méthode des moments $\rightsquigarrow$ calculer $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y_{12}^p)]$ pour $Y_{12} = [\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})$.

Preuve

- Méthode des moments $\rightsquigarrow$ calculer $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y_{12}^p)]$ pour $Y_{12} = [\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})$.
- Formule de Weingarten pour l'intégration sur le groupe unitaire:

$$\int_{\mathcal{U}(nk)} U_{i_1 j_1} \cdots U_{i_p j_p} \overline{U_{i'_1 j'_1}} \cdots \overline{U_{i'_p j'_p}} \, dU =$$

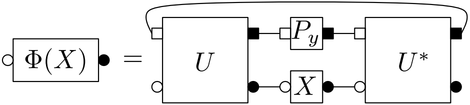
$$\sum_{\sigma,\tau \in \mathcal{S}_p} \delta_{i_1 i'_{\sigma(1)}} \ldots \delta_{i_p i'_{\sigma(p)}} \delta_{j_1 j'_{\tau(1)}} \ldots \delta_{j_p j'_{\tau(p)}} \mathrm{Wg}(nk, \sigma^{-1}\tau).$$

Preuve

- Méthode des moments $\rightsquigarrow$ calculer $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y_{12}^p)]$ pour $Y_{12} = [\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})$.
- Formule de Weingarten pour l'intégration sur le groupe unitaire:

$$\int_{\mathcal{U}(nk)} U_{i_1 j_1} \cdots U_{i_p j_p} \overline{U_{i'_1 j'_1}} \cdots \overline{U_{i'_p j'_p}} \, dU = \sum_{\sigma, \tau \in \mathcal{S}_p} \delta_{i_1 i'_{\sigma(1)}} \ldots \delta_{i_p i'_{\sigma(p)}} \delta_{j_1 j'_{\tau(1)}} \ldots \delta_{j_p j'_{\tau(p)}} \mathrm{Wg}(nk, \sigma^{-1}\tau).$$

- Formalisme graphique pour représenter les canaux quantiques

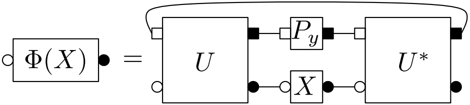


Preuve

- Méthode des moments $\rightsquigarrow$ calculer $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y_{12}^p)]$ pour $Y_{12} = [\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})$.
- Formule de Weingarten pour l'intégration sur le groupe unitaire:

$$\int_{\mathcal{U}(nk)} U_{i_1 j_1} \cdots U_{i_p j_p} \overline{U_{i'_1 j'_1}} \cdots \overline{U_{i'_p j'_p}} \, dU = \sum_{\sigma,\tau \in \mathcal{S}_p} \delta_{i_1 i'_{\sigma(1)}} \ldots \delta_{i_p i'_{\sigma(p)}} \delta_{j_1 j'_{\tau(1)}} \ldots \delta_{j_p j'_{\tau(p)}} \mathrm{Wg}(nk, \sigma^{-1}\tau).$$

- Formalisme graphique pour représenter les canaux quantiques



- Lecture de la formule de Weingarten avec ce formalisme $\rightsquigarrow$ "graph expansion".

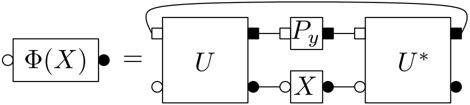
Preuve

- Méthode des moments $\rightsquigarrow$ calculer $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y_{12}^p)]$ pour $Y_{12} = [\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})$.
- Formule de Weingarten pour l'intégration sur le groupe unitaire:

$$\int_{\mathcal{U}(nk)} U_{i_1 j_1} \cdots U_{i_p j_p} \overline{U_{i'_1 j'_1}} \cdots \overline{U_{i'_p j'_p}} \, dU =$$

$$\sum_{\sigma,\tau \in \mathcal{S}_p} \delta_{i_1 i'_{\sigma(1)}} \ldots \delta_{i_p i'_{\sigma(p)}} \delta_{j_1 j'_{\tau(1)}} \ldots \delta_{j_p j'_{\tau(p)}} \mathrm{Wg}(nk, \sigma^{-1}\tau).$$

- Formalisme graphique pour représenter les canaux quantiques



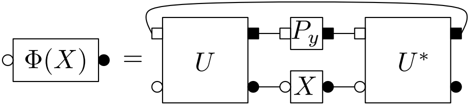
- Lecture de la formule de Weingarten avec ce formalisme $\rightsquigarrow$ "graph expansion".
- Asymptotique $\mathrm{Wg}(n, \sigma) = n^{-(p+|\sigma|)}(\mathrm{Mob}(\sigma) + O(n^{-2}))$.

Preuve

- Méthode des moments $\rightsquigarrow$ calculer $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(Y_{12}^p)]$ pour $Y_{12} = [\Phi \otimes \overline{\Phi}](X_{12})$.
- Formule de Weingarten pour l'intégration sur le groupe unitaire:

$$\int_{\mathcal{U}(nk)} U_{i_1 j_1} \cdots U_{i_p j_p} \overline{U_{i'_1 j'_1}} \cdots \overline{U_{i'_p j'_p}} \, dU = \sum_{\sigma, \tau \in \mathcal{S}_p} \delta_{i_1 i'_{\sigma(1)}} \ldots \delta_{i_p i'_{\sigma(p)}} \delta_{j_1 j'_{\tau(1)}} \ldots \delta_{j_p j'_{\tau(p)}} \mathrm{Wg}(nk, \sigma^{-1}\tau).$$

- Formalisme graphique pour représenter les canaux quantiques



- Lecture de la formule de Weingarten avec ce formalisme $\rightsquigarrow$ "graph expansion".
- Asymptotique $\mathrm{Wg}(n, \sigma) = n^{-(p+|\sigma|)}(\mathrm{Mob}(\sigma) + O(n^{-2}))$.
- Bijection de P. Biane entre les géodésiques dans $\mathcal{S}_p$ et $NC(p)$.

Borne pour le mono-canal

Borne inf pour H^p vs. valeurs propres dans un convexe

- Hayden & Winter: concentration de la mesure pour la fonction $H^p \rightsquigarrow$ contre exemple à $p > 1$ fixé.

Borne inf pour H^p vs. valeurs propres dans un convexe

- Hayden & Winter: concentration de la mesure pour la fonction $H^p \rightsquigarrow$ contre exemple à $p > 1$ fixé.

Théorème (Collins & N.)

Soit $k \geqslant 2$ fixé. Alors il existe un ensemble convexe S_k tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, presque sûrement quand $n \to \infty$, pour toute matrice densité ρ,

$$\mathrm{spec}_{>0}(\Phi(\rho)) \in S_k + \varepsilon.$$

L'ensemble S_k est défini à partir d'un vecteur de probabilités z_k:

$$S_k = \mathrm{conv}\{\sigma.z_k \,|\, \sigma \in \mathcal{S}_k\}.$$

En particulier, $\forall p \geqslant 1$,

$$H^p_{\min}(\Phi) \geqslant H^p(z_k).$$

Preuve

- Comme H^p est concave, $H^p_{\min}$ est atteinte sur les matrices densités extrémales, i.e. les projecteurs de rang 1, P_x.

Preuve

- Comme H^p est concave, $H^p_{\min}$ est atteinte sur les matrices densités extrémales, i.e. les projecteurs de rang 1, P_x.
- $\Phi(P_x) = \operatorname{Tr}_k[U(P_x \otimes P_y)U^*] = \operatorname{Tr}_k P_{U(x \otimes y)}$.

Preuve

- Comme H^p est concave, $H^p_{\min}$ est atteinte sur les matrices densités extrémales, i.e. les projecteurs de rang 1, P_x.
- $\Phi(P_x) = \mathrm{Tr}_k[U(P_x \otimes P_y)U^*] = \mathrm{Tr}_k\, P_{U(x\otimes y)}$.
- Quand x parcourt $\mathbb{C}^n$, $\{U(x \otimes y), x \in \mathbb{C}^n\}$ est un sous-espace aléatoire de Haar $W \subset \mathbb{C}^{nk}$ de dimension n.

Preuve

- Comme H^p est concave, $H^p_{\min}$ est atteinte sur les matrices densités extrémales, i.e. les projecteurs de rang 1, P_x.
- $\Phi(P_x) = \mathrm{Tr}_k[U(P_x \otimes P_y)U^*] = \mathrm{Tr}_k\, P_{U(x\otimes y)}$.
- Quand x parcourt $\mathbb{C}^n$, $\{U(x \otimes y), x \in \mathbb{C}^n\}$ est un sous-espace aléatoire de Haar $W \subset \mathbb{C}^{nk}$ de dimension n.
- Soient $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_j$ les j plus grandes valeurs propres de $\Phi(P_x)$; par le théorème min-max, on a

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_j = \sup_{V \subset \mathbb{C}^n, \dim V = j} \mathrm{Tr}(P_V\, \mathrm{Tr}_k\, P_{U(x\otimes y)}) = \sup_{V \subset \mathbb{C}^n, \dim V = j} \mathrm{Tr}(P_{V\otimes\mathbb{C}^k} P_{U(x\otimes y)}).$$

Preuve

- Comme H^p est concave, $H^p_{\min}$ est atteinte sur les matrices densités extrémales, i.e. les projecteurs de rang 1, P_x.
- $\Phi(P_x) = \operatorname{Tr}_k[U(P_x \otimes P_y)U^*] = \operatorname{Tr}_k P_{U(x\otimes y)}$.
- Quand x parcourt $\mathbb{C}^n$, $\{U(x \otimes y), x \in \mathbb{C}^n\}$ est un sous-espace aléatoire de Haar $W \subset \mathbb{C}^{nk}$ de dimension n.
- Soient $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_j$ les j plus grandes valeurs propres de $\Phi(P_x)$; par le théorème min-max, on a

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_j = \sup_{V \subset \mathbb{C}^n, \dim V = j} \operatorname{Tr}(P_V \operatorname{Tr}_k P_{U(x\otimes y)}) = \sup_{V \subset \mathbb{C}^n, \dim V = j} \operatorname{Tr}(P_{V\otimes\mathbb{C}^k} P_{U(x\otimes y)}).$$

- On considère le sup sur $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$:

$$\sup_{x \in \mathbb{C}^n} \lambda_1 + \cdots + \lambda_j = \sup_{V \subset \mathbb{C}^n, \dim V = j} \|P_V P_W P_V\|_\infty .$$

Preuve

- Comme H^p est concave, $H^p_{\min}$ est atteinte sur les matrices densités extrémales, i.e. les projecteurs de rang 1, P_x.
- $\Phi(P_x) = \operatorname{Tr}_k[U(P_x \otimes P_y)U^*] = \operatorname{Tr}_k P_{U(x\otimes y)}$.
- Quand x parcourt $\mathbb{C}^n$, $\{U(x \otimes y), x \in \mathbb{C}^n\}$ est un sous-espace aléatoire de Haar $W \subset \mathbb{C}^{nk}$ de dimension n.
- Soient $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_j$ les j plus grandes valeurs propres de $\Phi(P_x)$; par le théorème min-max, on a

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_j = \sup_{V \subset \mathbb{C}^n, \dim V = j} \operatorname{Tr}(P_V \operatorname{Tr}_k P_{U(x\otimes y)}) = \sup_{V \subset \mathbb{C}^n, \dim V = j} \operatorname{Tr}(P_{V\otimes\mathbb{C}^k} P_{U(x\otimes y)}).$$

- On considère le sup sur $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$:

$$\sup_{x\in\mathbb{C}^n} \lambda_1 + \cdots + \lambda_j = \sup_{V \subset \mathbb{C}^n, \dim V = j} \|P_V P_W P_V\|_\infty .$$

- Par la compacité de la Grassmannienne, on remplace (à un coût ε) le sup sur V par un max sur un nombre fini de V_i.

Preuve

- Comme H^p est concave, $H^p_{\min}$ est atteinte sur les matrices densités extrémales, i.e. les projecteurs de rang 1, P_x.
- $\Phi(P_x) = \mathrm{Tr}_k[U(P_x \otimes P_y)U^*] = \mathrm{Tr}_k\, P_{U(x\otimes y)}$.
- Quand x parcourt $\mathbb{C}^n$, $\{U(x \otimes y), x \in \mathbb{C}^n\}$ est un sous-espace aléatoire de Haar $W \subset \mathbb{C}^{nk}$ de dimension n.
- Soient $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_j$ les j plus grandes valeurs propres de $\Phi(P_x)$; par le théorème min-max, on a

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_j = \sup_{V \subset \mathbb{C}^n, \dim V = j} \mathrm{Tr}(P_V \,\mathrm{Tr}_k\, P_{U(x\otimes y)}) = \sup_{V \subset \mathbb{C}^n, \dim V = j} \mathrm{Tr}(P_{V \otimes \mathbb{C}^k} P_{U(x\otimes y)}).$$

- On considère le sup sur $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$:

$$\sup_{x \in \mathbb{C}^n} \lambda_1 + \cdots + \lambda_j = \sup_{V \subset \mathbb{C}^n, \dim V = j} \|P_V P_W P_V\|_\infty .$$

- Par la compacité de la Grassmannienne, on remplace (à un coût ε) le sup sur V par un max sur un nombre fini de V_i.
- Il reste à évaluer $\|P_V P_W P_V\|_\infty$, où V est fixe et W est un sous-espace aléatoire de Haar.

L'angle entre deux sous-espaces aléatoires

- Pour $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ considérons deux projecteurs de Haar $\pi_n, \pi'_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, indépendants, de rangs $\lfloor \alpha n \rfloor$ et $\lfloor \beta n \rfloor$.

L'angle entre deux sous-espaces aléatoires

- Pour $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ considérons deux projecteurs de Haar $\pi_n, \pi'_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, indépendants, de rangs $\lfloor \alpha n \rfloor$ et $\lfloor \beta n \rfloor$.
- Si $\alpha + \beta \geqslant 1$ alors $\|\pi_n \pi'_n\|_\infty = 1$.

L'angle entre deux sous-espaces aléatoires

- Pour $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ considérons deux projecteurs de Haar $\pi_n, \pi_n' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, indépendants, de rangs $\lfloor \alpha n \rfloor$ et $\lfloor \beta n \rfloor$.
- Si $\alpha + \beta \geqslant 1$ alors $\|\pi_n \pi_n'\|_\infty = 1$.
- On suppose $\alpha + \beta < 1$. Par un résultat de Voiculescu, π_n et π_n' sont asymptotiquement libres et la mesure spectrale empirique de $\pi_n \pi_n' \pi_n$ converge vers
$$(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_0) \boxtimes (\beta\delta_1 + (1-\beta)\delta_0)\,.$$

L'angle entre deux sous-espaces aléatoires

- Pour $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ considérons deux projecteurs de Haar $\pi_n, \pi'_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, indépendants, de rangs $\lfloor \alpha n \rfloor$ et $\lfloor \beta n \rfloor$.
- Si $\alpha + \beta \geqslant 1$ alors $\|\pi_n \pi'_n\|_\infty = 1$.
- On suppose $\alpha + \beta < 1$. Par un résultat de Voiculescu, π_n et π'_n sont asymptotiquement libres et la mesure spectrale empirique de $\pi_n \pi'_n \pi_n$ converge vers

$$(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_0) \boxtimes (\beta\delta_1 + (1-\beta)\delta_0) \,.$$

- On peut calculer le produit de convolution précédent explicitement à l'aide de la S-transformée, et on en déduit

$$\liminf_n \|\pi_n \pi'_n \pi_n\|_\infty \geqslant \varphi(\alpha, \beta) = \text{ bord du support de la mesure } \boxtimes \,.$$

L'angle entre deux sous-espaces aléatoires

- Pour $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ considérons deux projecteurs de Haar $\pi_n, \pi'_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, indépendants, de rangs $\lfloor \alpha n \rfloor$ et $\lfloor \beta n \rfloor$.
- Si $\alpha + \beta \geqslant 1$ alors $\|\pi_n \pi'_n\|_\infty = 1$.
- On suppose $\alpha + \beta < 1$. Par un résultat de Voiculescu, π_n et π'_n sont asymptotiquement libres et la mesure spectrale empirique de $\pi_n \pi'_n \pi_n$ converge vers
$$(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_0) \boxtimes (\beta\delta_1 + (1-\beta)\delta_0)\,.$$
- On peut calculer le produit de convolution précédent explicitement à l'aide de la S-transformée, et on en déduit
$$\liminf_n \|\pi_n \pi'_n \pi_n\|_\infty \geqslant \varphi(\alpha, \beta) = \text{ bord du support de la mesure } \boxtimes\,.$$

Théorème (Collins '05)

$$p.s. \qquad \lim_n \|\pi_n \pi'_n \pi_n\|_\infty = \varphi(\alpha, \beta) = 1 - \left[\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} - \sqrt{\alpha\beta}\right]^2.$$

Conclusion & perspectives

Conclusion & perspectives

- Avec des techniques de matrices aléatoires / probabilités libres, on a étudie le modèle de canaux quantiques aléatoires introduit par Hayden & Winter.

Conclusion & perspectives

- Avec des techniques de matrices aléatoires / probabilités libres, on a étudie le modèle de canaux quantiques aléatoires introduit par Hayden & Winter.
- Borne optimale pour le bi-canal.

Conclusion & perspectives

- Avec des techniques de matrices aléatoires / probabilités libres, on a étudie le modèle de canaux quantiques aléatoires introduit par Hayden & Winter.
- Borne optimale pour le bi-canal.
- Calcul de Weingarten graphique.

Conclusion & perspectives

- Avec des techniques de matrices aléatoires / probabilités libres, on a étudie le modèle de canaux quantiques aléatoires introduit par Hayden & Winter.
- Borne optimale pour le bi-canal.
- Calcul de Weingarten graphique.
- Résultats sur les valeurs propres pour le mono-canal (qui impliquent des bornes pour les entropies).

Conclusion & perspectives

- Avec des techniques de matrices aléatoires / probabilités libres, on a étudie le modèle de canaux quantiques aléatoires introduit par Hayden & Winter.
- Borne optimale pour le bi-canal.
- Calcul de Weingarten graphique.
- Résultats sur les valeurs propres pour le mono-canal (qui impliquent des bornes pour les entropies).

- Optimalité des résultats pour le mono-canal.

Conclusion & perspectives

- Avec des techniques de matrices aléatoires / probabilités libres, on a étudie le modèle de canaux quantiques aléatoires introduit par Hayden & Winter.
- Borne optimale pour le bi-canal.
- Calcul de Weingarten graphique.
- Résultats sur les valeurs propres pour le mono-canal (qui impliquent des bornes pour les entropies).

- Optimalité des résultats pour le mono-canal.
- Cas $p = 1$.

Conclusion & perspectives

- Avec des techniques de matrices aléatoires / probabilités libres, on a étudie le modèle de canaux quantiques aléatoires introduit par Hayden & Winter.
- Borne optimale pour le bi-canal.
- Calcul de Weingarten graphique.
- Résultats sur les valeurs propres pour le mono-canal (qui impliquent des bornes pour les entropies).

- Optimalité des résultats pour le mono-canal.
- Cas $p = 1$.
- Modèle de Hastings ?

Conclusion & perspectives

- Avec des techniques de matrices aléatoires / probabilités libres, on a étudie le modèle de canaux quantiques aléatoires introduit par Hayden & Winter.
- Borne optimale pour le bi-canal.
- Calcul de Weingarten graphique.
- Résultats sur les valeurs propres pour le mono-canal (qui impliquent des bornes pour les entropies).

- Optimalité des résultats pour le mono-canal.
- Cas $p = 1$.
- Modèle de Hastings ?
- Construire des contre exemples déterministes (théorie des représentations ?).

Merci !

http://arxiv.org/abs/0905.2313

et

http://arxiv.org/abs/0906.1877