États aléatoires, théorie quantique de l'information et probabilités libres

Ion Nechita

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

Lyon, 24 Mars 2009

Cadre

- Matrices aléatoires

Cadre

- Matrices aléatoires
- Matrices densités et canaux quantiques aléatoires
  - Systèmes de grandes dimensions
  - Etats asymptotiques
  - Interactions quantiques répétées en environnement aléatoire

Cadre

- Matrices aléatoires
- Matrices densités et canaux quantiques aléatoires
  - Systèmes de grandes dimensions
  - Etats asymptotiques
  - Interactions quantiques répétées en environnement aléatoire
- Catalyse quantique
  - Conjecture de Nielsen

Cadre

- Matrices aléatoires
- Matrices densités et canaux quantiques aléatoires
  - Systèmes de grandes dimensions
  - Etats asymptotiques
  - Interactions quantiques répétées en environnement aléatoire
- Catalyse quantique
  - Conjecture de Nielsen
- Probabilités libres
  - Approximation de l'espace de Fock libre
  - Modèle de permutations pour la liberté asymptotique

Objectifs

- Etudier des questions en TQI avec des outils probabilistes
  - Matrices densités aléatoires
    - Liens avec les ensembles *classiques* des matrices aléatoires
    - Etude asymptotique des modèles existants
    - Proposer des nouveaux modèles

Objectifs

- Etudier des questions en TQI avec des outils probabilistes
  - Matrices densités aléatoires
    - Liens avec les ensembles *classiques* des matrices aléatoires
    - Etude asymptotique des modèles existants
    - Proposer des nouveaux modèles
  - Catalyse quantique
    - Outil probabiliste: grandes déviations
    - Convolutions itérées des mesures de probabilité
    - Répondre aux questions analogues pour les mesures de probabilité

Objectifs

- Etudier des questions en TQI avec des outils probabilistes
  - Matrices densités aléatoires
    - Liens avec les ensembles *classiques* des matrices aléatoires
    - Etude asymptotique des modèles existants
    - Proposer des nouveaux modèles
  - Catalyse quantique
    - Outil probabiliste: grandes déviations
    - Convolutions itérées des mesures de probabilité
    - Répondre aux questions analogues pour les mesures de probabilité
- Probabilités libres
  - Obtenir une approximation de l'espace de Fock libre analogue à celle proposée par S. Attal pour l'espace de Fock symétrique
  - Généraliser les résultats de P. Biane à des cycles quelconques
  - Adapter le modèle de permutations à d'autres types d'indépendance

Publications - prépublications

1. *Asymptotics of random density matrices* - Ann. Henri Poincaré 8 (2007), no. 8, 1521-1538.
2. *Catalytic majorization and ℓ_p norms* (avec Guillaume Aubrun) - Comm. Math. Phys. 278 (2008), no. 1, 133-144.
3. *Stochastic domination for iterated convolutions and catalytic majorization* (avec Guillaume Aubrun) - à paraître dans Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.
4. *A permutation model for free random variables and its classical analogue* (avec Florent Benaych-Georges) - à paraître dans Pacific Journal of Mathematics.
5. *Discrete approximation of the free Fock space* (avec Stéphane Attal) - soumis à Journal of Functional Analysis.
6. *Random repeated quantum interactions and random invariant states* (avec Clément Pellegrini) - soumis à Probability Theory and Related Fields.

Canaux quantiques et matrices densités aléatoires

Dynamique des systèmes quantiques ouverts

- Systèmes quantiques avec un nombre fini de degrés de liberté, décrits par des vecteurs purs $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$ ou par des matrices densités $\rho \in \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$.

Dynamique des systèmes quantiques ouverts

- Systèmes quantiques avec un nombre fini de degrés de liberté, décrits par des vecteurs purs $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$ ou par des matrices densités $\rho \in \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$.
- Systèmes fermés (isolés): dynamique donnée par l'équation de Schrödinger

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad \text{ou} \quad \rho' = U\rho U^*,$$

où $U = e^{-i\tau H} \in \mathcal{U}(d)$ est la matrice unitaire décrivant l'intéraction.

Dynamique des systèmes quantiques ouverts

- Systèmes quantiques avec un nombre fini de degrés de liberté, décrits par des vecteurs purs $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$ ou par des matrices densités $\rho \in \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$.
- Systèmes fermés (isolés): dynamique donnée par l'équation de Schrödinger

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad \text{ou} \quad \rho' = U\rho U^*,$$

où $U = e^{-i\tau H} \in \mathcal{U}(d)$ est la matrice unitaire décrivant l'intéraction.
- Systèmes ouverts: le système qui nous intéresse $\rho \in \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$ est *couplé* à un environnement (inconnu/inaccessible) décrit par un état $\beta \in \mathcal{M}_{d'}^{1,+}(\mathbb{C})$; les deux systèmes couplés subissent une dynamique "fermée" décrite par $U \in \mathcal{U}(dd')$

$$U(\rho \otimes \beta)U^*.$$

Dynamique des systèmes quantiques ouverts

- Systèmes quantiques avec un nombre fini de degrés de liberté, décrits par des vecteurs purs $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$ ou par des matrices densités $\rho \in \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$.
- Systèmes fermés (isolés): dynamique donnée par l'équation de Schrödinger

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad \text{ou} \quad \rho' = U\rho U^*,$$

  où $U = e^{-i\tau H} \in \mathcal{U}(d)$ est la matrice unitaire décrivant l'intéraction.
- Systèmes ouverts: le système qui nous intéresse $\rho \in \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$ est *couplé* à un environnement (inconnu/inaccessible) décrit par un état $\beta \in \mathcal{M}_{d'}^{1,+}(\mathbb{C})$; les deux systèmes couplés subissent une dynamique "fermée" décrite par $U \in \mathcal{U}(dd')$

$$U(\rho \otimes \beta)U^*.$$

- Comme les d' degrés de liberté sont inaccessibles, on prend la trace partielle sur l'environnement

$$\rho' = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U(\rho \otimes \beta)U^*\right].$$

Interactions quantiques répétées et canaux quantiques

- On considère un système quantique d-dimensionnel en interaction avec une chaîne infinie $(\beta_n)_n$. Les interactions sont décrites par des matrices unitaires $U_n \in \mathcal{U}(dd')$:

$$\rho_n = \Phi^{U_n,\beta_n}(\rho_{n-1}) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U_n(\rho_{n-1}\otimes\beta_n)U_n^*\right].$$

Interactions quantiques répétées et canaux quantiques

- On considère un système quantique d-dimensionnel en interaction avec une chaîne infinie $(\beta_n)_n$. Les interactions sont décrites par des matrices unitaires $U_n \in \mathcal{U}(dd')$:

$$\rho_n = \Phi^{U_n, \beta_n}(\rho_{n-1}) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U_n(\rho_{n-1} \otimes \beta_n)U_n^*\right].$$

- L'application linéaire $\Phi^{U,\beta} : \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$ est appelée un canal quantique.

Interactions quantiques répétées et canaux quantiques

- On considère un système quantique d-dimensionnel en interaction avec une chaîne infinie $(\beta_n)_n$. Les interactions sont décrites par des matrices unitaires $U_n \in \mathcal{U}(dd')$:

$$\rho_n = \Phi^{U_n,\beta_n}(\rho_{n-1}) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U_n(\rho_{n-1} \otimes \beta_n)U_n^*\right].$$

- L'application linéaire $\Phi^{U,\beta} : \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$ est appelée un canal quantique.
- L'état du système après n interactions successives est donné par

$$\rho_n = \Phi^{U_n,\beta_n} \circ \cdots \circ \Phi^{U_1,\beta_1}(\rho_0).$$

Interactions quantiques répétées et canaux quantiques

- On considère un système quantique d-dimensionnel en interaction avec une chaîne infinie $(\beta_n)_n$. Les interactions sont décrites par des matrices unitaires $U_n \in \mathcal{U}(dd')$:

$$\rho_n = \Phi^{U_n,\beta_n}(\rho_{n-1}) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U_n(\rho_{n-1} \otimes \beta_n)U_n^*\right].$$

- L'application linéaire $\Phi^{U,\beta} : \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$ est appelée un canal quantique.
- L'état du système après n interactions successives est donné par

$$\rho_n = \Phi^{U_n,\beta_n} \circ \cdots \circ \Phi^{U_1,\beta_1}(\rho_0).$$

Problèmes

- Définir un modèle de canaux quantiques aléatoires.

Interactions quantiques répétées et canaux quantiques

- On considère un système quantique d-dimensionnel en interaction avec une chaîne infinie $(\beta_n)_n$. Les interactions sont décrites par des matrices unitaires $U_n \in \mathcal{U}(dd')$:

$$\rho_n = \Phi^{U_n,\beta_n}(\rho_{n-1}) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U_n(\rho_{n-1} \otimes \beta_n)U_n^*\right].$$

- L'application linéaire $\Phi^{U,\beta} : \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$ est appelée un canal quantique.
- L'état du système après n interactions successives est donné par

$$\rho_n = \Phi^{U_n,\beta_n} \circ \cdots \circ \Phi^{U_1,\beta_1}(\rho_0).$$

Problèmes

- Définir un modèle de canaux quantiques aléatoires.
- Etudier l'action d'un tel canal aléatoire sur les matrices densités.

Interactions quantiques répétées et canaux quantiques

- On considère un système quantique d-dimensionnel en interaction avec une chaîne infinie $(\beta_n)_n$. Les interactions sont décrites par des matrices unitaires $U_n \in \mathcal{U}(dd')$:

$$\rho_n = \Phi^{U_n,\beta_n}(\rho_{n-1}) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U_n(\rho_{n-1} \otimes \beta_n)U_n^*\right].$$

- L'application linéaire $\Phi^{U,\beta} : \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$ est appelée un canal quantique.
- L'état du système après n interactions successives est donné par

$$\rho_n = \Phi^{U_n,\beta_n} \circ \cdots \circ \Phi^{U_1,\beta_1}(\rho_0).$$

Problèmes

- Définir un modèle de canaux quantiques aléatoires.
- Etudier l'action d'un tel canal aléatoire sur les matrices densités.
- Etudier l'état $\lim_{n\to\infty} \rho_n$.

Définition

Un canal quantique est une application linéaire $\Phi : \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ *complètement positive* (i.e. $\Phi \otimes I_{d'}$ positive $\forall d'$) qui *préserve la trace*.

Canaux quantiques

Définition

Un canal quantique est une application linéaire $\Phi : \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ *complètement positive* (i.e. $\Phi \otimes I_{d'}$ positive $\forall d'$) qui *préserve la trace*.

Proposition

Une application linéaire $\Phi : \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est un canal quantique ssi l'une des deux assertions suivantes est vérifiée:

1. *Dilatation de Stinespring: pour un $d' \in \mathbb{N}$, il existe une matrice densité $\beta \in \mathcal{M}_{d'}^{1,+}(\mathbb{C})$ et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{U}(dd')$ tels que*

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U(X \otimes \beta)U^*\right], \quad \forall X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}).$$

Canaux quantiques

Définition

Un canal quantique est une application linéaire $\Phi : \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ *complètement positive* (i.e. $\Phi \otimes I_{d'}$ positive $\forall d'$) qui *préserve la trace*.

Proposition

Une application linéaire $\Phi : \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est un canal quantique ssi l'une des deux assertions suivantes est vérifiée:

1. *Dilatation de Stinespring: pour un $d' \in \mathbb{N}$, il existe une matrice densité $\beta \in \mathcal{M}_{d'}^{1,+}(\mathbb{C})$ et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{U}(dd')$ tels que*

$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U(X \otimes \beta)U^*\right], \quad \forall X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}).$$

2. *Décomposition de Kraus: il existe k matrices $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ telles que*

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{k} L_i X L_i^*, \quad \forall X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \quad \textit{et} \quad \sum_{i=1}^{k} L_i^* L_i = I_d.$$

Canaux quantiques et matrices densités aléatoires

- Fixons deux entiers $d, d' \geqslant 2$ et une matrice densité $\beta \in \mathcal{M}_{d'}^{1,+}(\mathbb{C})$. A toute matrice unitaire $U \in \mathcal{U}(dd')$, on associe le canal

$$\Phi^{U,\beta}(X) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U(X \otimes \beta)U^*\right].$$

Canaux quantiques et matrices densités aléatoires

- Fixons deux entiers $d, d' \geqslant 2$ et une matrice densité $\beta \in \mathcal{M}_{d'}^{1,+}(\mathbb{C})$. A toute matrice unitaire $U \in \mathcal{U}(dd')$, on associe le canal

$$\Phi^{U,\beta}(X) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U(X \otimes \beta)U^*\right].$$

- Si U est une matrice unitaire aléatoire de Haar, on obtient une v.a. à valeurs dans les canaux quantiques (β étant fixé)

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(dd') &\to \mathcal{L}(\mathcal{M}_d(\mathbb{C})) \\ U &\mapsto \Phi^{U,\beta}. \end{aligned}$$

Canaux quantiques et matrices densités aléatoires

- Fixons deux entiers $d, d' \geqslant 2$ et une matrice densité $\beta \in \mathcal{M}_{d'}^{1,+}(\mathbb{C})$. A toute matrice unitaire $U \in \mathcal{U}(dd')$, on associe le canal

$$\Phi^{U,\beta}(X) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U(X \otimes \beta)U^*\right].$$

- Si U est une matrice unitaire aléatoire de Haar, on obtient une v.a. à valeurs dans les canaux quantiques (β étant fixé)

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(dd') &\to \mathcal{L}(\mathcal{M}_d(\mathbb{C})) \\ U &\mapsto \Phi^{U,\beta}. \end{aligned}$$

- Pour un état pur $|x\rangle\langle x| \in \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$, on définit la matrice densité aléatoire

$$\mathcal{U}(dd') \ni U \mapsto \rho = \Phi^{U,\beta}(|x\rangle\langle x|) = \mathrm{Tr}_{d'}[U(|x\rangle\langle x| \otimes \beta)U^*].$$

Canaux quantiques et matrices densités aléatoires

- Fixons deux entiers $d, d' \geqslant 2$ et une matrice densité $\beta \in \mathcal{M}_{d'}^{1,+}(\mathbb{C})$. A toute matrice unitaire $U \in \mathcal{U}(dd')$, on associe le canal

$$\Phi^{U,\beta}(X) = \mathrm{Tr}_{d'}\left[U(X \otimes \beta)U^*\right].$$

- Si U est une matrice unitaire aléatoire de Haar, on obtient une v.a. à valeurs dans les canaux quantiques (β étant fixé)

$$\mathcal{U}(dd') \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_d(\mathbb{C}))$$
$$U \mapsto \Phi^{U,\beta}.$$

- Pour un état pur $|x\rangle\langle x| \in \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$, on définit la matrice densité aléatoire

$$\mathcal{U}(dd') \ni U \mapsto \rho = \Phi^{U,\beta}(|x\rangle\langle x|) = \mathrm{Tr}_{d'}[U(|x\rangle\langle x| \otimes \beta)U^*].$$

Si $\beta = |y\rangle\langle y|$ est un état pur, alors

$$\rho = \mathrm{Tr}_{d'} |U(x \otimes y)\rangle\langle U(x \otimes y)|$$

est un élément de l'ensemble induit de matrices densités aléatoires.

L'ensemble induit

$$\rho = \mathrm{Tr}_{d'} |U(x \otimes y)\rangle\langle U(x \otimes y)|$$

L'ensemble induit

$$\rho = \mathrm{Tr}_{d'} \, |U(x \otimes y)\rangle\langle U(x \otimes y)|$$

- Invariance unitaire $\Rightarrow$ la distribution de ρ *ne dépend pas* du choix des vecteurs unitaires x et y.

L'ensemble induit

$$\rho = \mathrm{Tr}_{d'} |U(x \otimes y)\rangle\langle U(x \otimes y)|$$

- Invariance unitaire $\Rightarrow$ la distribution de ρ *ne dépend pas* du choix des vecteurs unitaires x et y.
- La matrice ρ a donc la même distribution que $\mathrm{Tr}_{d'} |z\rangle\langle z|$, où z est un vecteur uniforme (au sens de Lebesgue) sur la sphère unité de $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{d'} \simeq \mathbb{C}^{dd'}$.

L'ensemble induit

$$\rho = \mathrm{Tr}_{d'} |U(x \otimes y)\rangle\langle U(x \otimes y)|$$

- Invariance unitaire $\Rightarrow$ la distribution de ρ *ne dépend pas* du choix des vecteurs unitaires x et y.
- La matrice ρ a donc la même distribution que $\mathrm{Tr}_{d'} |z\rangle\langle z|$, où z est un vecteur uniforme (au sens de Lebesgue) sur la sphère unité de $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{d'} \simeq \mathbb{C}^{dd'}$.
- La distribution de ρ est invariante par conjugaison unitaire: $\rho \stackrel{\text{loi}}{=} V\rho V^*$ pour tout $V \in \mathcal{U}(d)$. Donc $\rho = V \operatorname{diag}(D) V^*$, où D est un vecteur aléatoire dans le simplexe des probabilités et V est une matrice unitaire de Haar.

L'ensemble induit

$$\rho = \operatorname{Tr}_{d'} |U(x \otimes y)\rangle\langle U(x \otimes y)|$$

- Invariance unitaire $\Rightarrow$ la distribution de ρ *ne dépend pas* du choix des vecteurs unitaires x et y.
- La matrice ρ a donc la même distribution que $\operatorname{Tr}_{d'} |z\rangle\langle z|$, où z est un vecteur uniforme (au sens de Lebesgue) sur la sphère unité de $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{d'} \simeq \mathbb{C}^{dd'}$.
- La distribution de ρ est invariante par conjugaison unitaire: $\rho \overset{\text{loi}}{=} V\rho V^*$ pour tout $V \in \mathcal{U}(d)$. Donc $\rho = V \operatorname{diag}(D) V^*$, où D est un vecteur aléatoire dans le simplexe des probabilités et V est une matrice unitaire de Haar.
- Il existe un lien avec l'ensemble de Wishart: si $W = XX^*$ est une matrice de Wishart de paramètres d et d', alors

$$\rho \overset{\text{loi}}{=} \frac{W}{\operatorname{Tr} W} \overset{\text{loi}}{=} W_{|\operatorname{Tr}(W)=1}.$$

L'ensemble induit pour des grandes matrices

Deux régimes asymptotiques:

L'ensemble induit pour des grandes matrices

Deux régimes asymptotiques:

1. d fixé et $d' \to \infty$

L'ensemble induit pour des grandes matrices

Deux régimes asymptotiques:

1. d fixé et $d' \to \infty$
2. $d, d' \to \infty$ avec $d'/d \to c > 0$.

L'ensemble induit pour des grandes matrices

Deux régimes asymptotiques:

1. d fixé et $d' \to \infty$
2. $d, d' \to \infty$ avec $d'/d \to c > 0$.

Théorème

1. *Les matrices densités du premier modèle convergent presque sûrement vers l'état maximalement mélangé I/d.*

L'ensemble induit pour des grandes matrices

Deux régimes asymptotiques:

1. d fixé et $d' \to \infty$
2. $d, d' \to \infty$ avec $d'/d \to c > 0$.

Théorème

1. *Les matrices densités du premier modèle convergent presque sûrement vers l'état maximalement mélangé I/d.*
2. *Pour $c \in (0, \infty)$, soient $(d(n))_n$ et $(d'(n))_n$ des suites d'entiers telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{d'(n)}{d(n)} = c$. Pour une suite de matrices densités aléatoires $(\rho_n)_n$ de paramètres $[d(n), d'(n)]$, on considère la mesure spectrale empirique (renormalisée) de ρ_n:*

$$L_n = \frac{1}{d(n)} \sum_{i=1}^{d(n)} \delta_{d'(n)\lambda_i(\rho_n)},$$

où $\lambda_1(\rho_n), \cdots, \lambda_{d(n)}(\rho_n)$ sont les valeurs propres de ρ_n. Alors, presque sûrement, la suite $(L_n)_n$ converge faiblement vers la mesure de Marchenko-Pastur μ_c de paramètre c.

Un nouveau modèle de matrices densités aléatoires

- L'ensemble induit est obtenu après une seule itération d'un canal aléatoire

$$\begin{aligned}\rho &= \mathrm{Tr}_{d'}[U(|x\rangle\langle x| \otimes |y\rangle\langle y|)U^*] \\ &= \Phi^{U,y}(|x\rangle\langle x|).\end{aligned}$$

Un nouveau modèle de matrices densités aléatoires

- L'ensemble induit est obtenu après une seule itération d'un canal aléatoire

$$\begin{aligned}\rho &= \mathrm{Tr}_{d'}[U(|x\rangle\langle x| \otimes |y\rangle\langle y|)U^*] \\ &= \Phi^{U,y}(|x\rangle\langle x|).\end{aligned}$$

- Considérons un grand nombre d'itérations:

$$\left(\Phi^{U,y}\right)^n (|x\rangle\langle x|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho_\infty.$$

Un nouveau modèle de matrices densités aléatoires

- L'ensemble induit est obtenu après une seule itération d'un canal aléatoire

$$\begin{aligned}\rho &= \mathrm{Tr}_{d'}[U(|x\rangle\langle x| \otimes |y\rangle\langle y|)U^*] \\ &= \Phi^{U,y}(|x\rangle\langle x|).\end{aligned}$$

- Considérons un grand nombre d'itérations:

$$\left(\Phi^{U,y}\right)^n(|x\rangle\langle x|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho_\infty.$$

- Sous réserve d'existence de la limite précédente, on définit la matrice densité aléatoire

$$\mathcal{U}(dd') \ni U \mapsto \rho_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\Phi^{U,y}\right)^n(|x\rangle\langle x|).$$

Un nouveau modèle de matrices densités aléatoires

- L'ensemble induit est obtenu après une seule itération d'un canal aléatoire

$$\begin{aligned}\rho &= \mathrm{Tr}_{d'}[U(|x\rangle\langle x| \otimes |y\rangle\langle y|)U^*] \\ &= \Phi^{U,y}(|x\rangle\langle x|).\end{aligned}$$

- Considérons un grand nombre d'itérations:

$$\left(\Phi^{U,y}\right)^n(|x\rangle\langle x|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho_\infty.$$

- Sous réserve d'existence de la limite précédente, on définit la matrice densité aléatoire

$$\mathcal{U}(dd') \ni U \mapsto \rho_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\Phi^{U,y}\right)^n(|x\rangle\langle x|).$$

- Plus généralement, on introduit l'ensemble induit asymptotique:

$$\mathcal{U}(dd') \ni U \mapsto \rho_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\Phi^{U,\beta}\right)^n(\rho_0), \qquad \text{où}$$

  - $\beta \in \mathcal{M}_{d'}^{1,+}(\mathbb{C})$ est une matrice densité fixée de spectre b
  - $\rho_0 \in \mathcal{M}_{d}^{1,+}(\mathbb{C})$ est un état initial quelconque.

L'ensemble induit asymptotique - existence

- Tout canal quantique admet une matrice densité invariante et son rayon spectral vaut 1.

L'ensemble induit asymptotique - existence

- Tout canal quantique admet une matrice densité invariante et son rayon spectral vaut 1.
- Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des canaux quantiques dont 1 est valeur propre simple et dont les autres v.p. se trouvent dans le disque unité ouvert.

L'ensemble induit asymptotique - existence

- Tout canal quantique admet une matrice densité invariante et son rayon spectral vaut 1.
- Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des canaux quantiques dont 1 est valeur propre simple et dont les autres v.p. se trouvent dans le disque unité ouvert.

Proposition

Pour tout canal $\Phi \in \mathcal{C}$ et pour toute matrice densité $\rho_0 \in \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\rho_0) = \rho_\infty,$$

où ρ_∞ est l'unique état invariant de Φ.

L'ensemble induit asymptotique - existence

- Tout canal quantique admet une matrice densité invariante et son rayon spectral vaut 1.
- Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des canaux quantiques dont 1 est valeur propre simple et dont les autres v.p. se trouvent dans le disque unité ouvert.

Proposition

Pour tout canal $\Phi \in \mathcal{C}$ et pour toute matrice densité $\rho_0 \in \mathcal{M}_d^{1,+}(\mathbb{C})$,

$$\lim_{n \to \infty} \Phi^n(\rho_0) = \rho_\infty,$$

où ρ_∞ est l'unique état invariant de Φ.

Théorème

Fixons $\beta \in \mathcal{M}_{d'}^{1,+}(\mathbb{C})$. Alors, pour Haar-presque toute matrice unitaire $U \in \mathcal{U}(dd')$

$$\Phi^{U,\beta} \in \mathcal{C}.$$

L'ensemble induit asymptotique - preuve de l'existence

- La condition sur la simplicité de la valeur propre 1, ainsi que la condition $\lambda \in \mathrm{spec}(\Phi^{U,\beta})$ pour $|\lambda| = 1$, peuvent s'exprimer à l'aide d'un polynôme.

L'ensemble induit asymptotique - preuve de l'existence

- La condition sur la simplicité de la valeur propre 1, ainsi que la condition $\lambda \in \mathrm{spec}(\Phi^{U,\beta})$ pour $|\lambda| = 1$, peuvent s'exprimer à l'aide d'un polynôme.
- Un canal Φ est dit irréductible s'il n'existe pas de projecteur non-trivial P tel que $\Phi(P) \leqslant cP$ pour une constante $c > 0$.

L'ensemble induit asymptotique - preuve de l'existence

- La condition sur la simplicité de la valeur propre 1, ainsi que la condition $\lambda \in \mathrm{spec}(\Phi^{U,\beta})$ pour $|\lambda| = 1$, peuvent s'exprimer à l'aide d'un polynôme.
- Un canal Φ est dit irréductible s'il n'existe pas de projecteur non-trivial P tel que $\Phi(P) \leqslant cP$ pour une constante $c > 0$.
- Pour un canal quantique irréductible, les valeurs propres de module 1 sont des racines de l'unité.

L'ensemble induit asymptotique - preuve de l'existence

- La condition sur la simplicité de la valeur propre 1, ainsi que la condition $\lambda \in \mathrm{spec}(\Phi^{U,\beta})$ pour $|\lambda| = 1$, peuvent s'exprimer à l'aide d'un polynôme.
- Un canal Φ est dit irréductible s'il n'existe pas de projecteur non-trivial P tel que $\Phi(P) \leqslant cP$ pour une constante $c > 0$.
- Pour un canal quantique irréductible, les valeurs propres de module 1 sont des racines de l'unité.
- $\Phi(X) = \sum_i L_i X L_i^*$ est irréductible ssi

$$\bigcap_i \mathrm{Lat}(L_i) \quad \text{est triviale.}$$

L'ensemble induit asymptotique - preuve de l'existence

- La condition sur la simplicité de la valeur propre 1, ainsi que la condition $\lambda \in \mathrm{spec}(\Phi^{U,\beta})$ pour $|\lambda| = 1$, peuvent s'exprimer à l'aide d'un polynôme.
- Un canal Φ est dit irréductible s'il n'existe pas de projecteur non-trivial P tel que $\Phi(P) \leqslant cP$ pour une constante $c > 0$.
- Pour un canal quantique irréductible, les valeurs propres de module 1 sont des racines de l'unité.
- $\Phi(X) = \sum_i L_i X L_i^*$ est irréductible ssi

$$\bigcap_i \mathrm{Lat}(L_i) \quad \text{est triviale.}$$

- Toutes ces conditions peuvent s'exprimer à l'aide d'un polynôme universel en l'évaluant en les parties réelles et imaginaires des $(dd')^2$ coefficients de la matrice U définissant le canal.

L'ensemble induit asymptotique - preuve de l'existence

- La condition sur la simplicité de la valeur propre 1, ainsi que la condition $\lambda \in \mathrm{spec}(\Phi^{U,\beta})$ pour $|\lambda| = 1$, peuvent s'exprimer à l'aide d'un polynôme.
- Un canal Φ est dit irréductible s'il n'existe pas de projecteur non-trivial P tel que $\Phi(P) \leqslant cP$ pour une constante $c > 0$.
- Pour un canal quantique irréductible, les valeurs propres de module 1 sont des racines de l'unité.
- $\Phi(X) = \sum_i L_i X L_i^*$ est irréductible ssi

$$\bigcap_i \mathrm{Lat}(L_i) \quad \text{est triviale.}$$

- Toutes ces conditions peuvent s'exprimer à l'aide d'un polynôme universel en l'évaluant en les parties réelles et imaginaires des $(dd')^2$ coefficients de la matrice U définissant le canal.

Lemme

L'ensemble des matrices unitaires $U \in \mathcal{U}(dd')$ dont les parties réelles et imaginaires des coefficients annulent un polynôme donné P est soit de mesure de Haar nulle, soit égal à $\mathcal{U}(dd')$ tout entier.

L'ensemble induit asymptotique - propriétés

$$\mathcal{U}(dd') \ni U \mapsto \rho_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\Phi^{U,\beta}\right)^n (\rho_0)$$

- La variable aléatoire $U \mapsto \rho_\infty$ est définie presque partout sur $\mathcal{U}(dd')$ (car presque tout canal quantique est dans $\mathcal{C}$).

L'ensemble induit asymptotique - propriétés

$$\mathcal{U}(dd') \ni U \mapsto \rho_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\Phi^{U,\beta}\right)^n (\rho_0)$$

- La variable aléatoire $U \mapsto \rho_\infty$ est définie presque partout sur $\mathcal{U}(dd')$ (car presque tout canal quantique est dans $\mathcal{C}$).
- La distribution de ρ_∞ ne dépend ni de ρ_0 ni de la phase de β. Pour tout $W \in \mathcal{U}(d')$,

$$\rho_\infty^{\beta} \overset{\text{loi}}{=} \rho_\infty^{W\beta W^*}.$$

L'ensemble induit asymptotique - propriétés

$$\mathcal{U}(dd') \ni U \mapsto \rho_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\Phi^{U,\beta}\right)^n (\rho_0)$$

- La variable aléatoire $U \mapsto \rho_\infty$ est définie presque partout sur $\mathcal{U}(dd')$ (car presque tout canal quantique est dans $\mathcal{C}$).
- La distribution de ρ_∞ ne dépend ni de ρ_0 ni de la phase de β. Pour tout $W \in \mathcal{U}(d')$,
$$\rho_\infty^\beta \overset{\text{loi}}{=} \rho_\infty^{W\beta W^*}.$$
- La distribution de ρ_∞ est invariante par conjugaison unitaire: $\rho_\infty \overset{\text{loi}}{=} V\rho_\infty V^*$ pour tout $V \in \mathcal{U}(d)$.

L'ensemble induit asymptotique - propriétés

$$\mathcal{U}(dd') \ni U \mapsto \rho_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\Phi^{U,\beta}\right)^n (\rho_0)$$

- La variable aléatoire $U \mapsto \rho_\infty$ est définie presque partout sur $\mathcal{U}(dd')$ (car presque tout canal quantique est dans $\mathcal{C}$).
- La distribution de ρ_∞ ne dépend ni de ρ_0 ni de la phase de β. Pour tout $W \in \mathcal{U}(d')$,
$$\rho_\infty^\beta \overset{\text{loi}}{=} \rho_\infty^{W\beta W^*}.$$
- La distribution de ρ_∞ est invariante par conjugaison unitaire: $\rho_\infty \overset{\text{loi}}{=} V\rho_\infty V^*$ pour tout $V \in \mathcal{U}(d)$.
- Si $\beta = I_{d'}/d'$, alors $\rho_\infty = I_d/d$ presque sûrement.

L'ensemble induit asymptotique - propriétés

$$\mathcal{U}(dd') \ni U \mapsto \rho_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\Phi^{U,\beta}\right)^n (\rho_0)$$

- La variable aléatoire $U \mapsto \rho_\infty$ est définie presque partout sur $\mathcal{U}(dd')$ (car presque tout canal quantique est dans $\mathcal{C}$).
- La distribution de ρ_∞ ne dépend ni de ρ_0 ni de la phase de β. Pour tout $W \in \mathcal{U}(d')$,

$$\rho_\infty^\beta \overset{\text{loi}}{=} \rho_\infty^{W\beta W^*}.$$

- La distribution de ρ_∞ est invariante par conjugaison unitaire: $\rho_\infty \overset{\text{loi}}{=} V\rho_\infty V^*$ pour tout $V \in \mathcal{U}(d)$.
- Si $\beta = I_{d'}/d'$, alors $\rho_\infty = I_d/d$ presque sûrement.

Conclusion

On a introduit une famille de mesures de probabilité sur l'ensemble des matrices densités, indexée par les vecteurs de probabilité b à support fini. Ce sont les distributions des états invariants des canaux quantiques aléatoires $\Phi^{U,\beta}$.

Simulations numériques

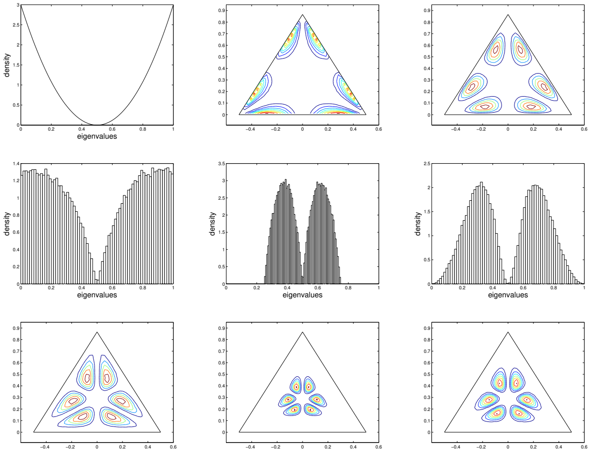


Figure: 1ère ligne - ensemble induit d'=2, d'=3, d'=5; Lignes 2&3 - ensemble induit asymptotique b=[1, 0], b=[3/4, 1/4],b=[1, 0, 0, 0];b=[1, 0, 0],b=[3/4, 1/8, 1/8] et b=[1, 0, 0, 0, 0].

Catalyse quantique
et
domination stochastique

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\varphi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\varphi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\varphi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en n'utilisant que des opérations locales et de la communication classique ($LOCC$).

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\varphi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\varphi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en n'utilisant que des opérations locales et de la communication classique ($LOCC$).
- Opérations locales:

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\varphi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\varphi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en n'utilisant que des opérations locales et de la communication classique ($LOCC$).
- Opérations locales:
  1. unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\varphi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\varphi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en n'utilisant que des opérations locales et de la communication classique ($LOCC$).
- Opérations locales:
  1. unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
  2. mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\varphi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\varphi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en n'utilisant que des opérations locales et de la communication classique ($LOCC$).
- Opérations locales:
  1. unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
  2. mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Problème

Sous quelles conditions peuvent-ils LOCC-transformer $|\varphi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\varphi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\varphi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en n'utilisant que des opérations locales et de la communication classique ($LOCC$).
- Opérations locales:
  1. unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
  2. mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Problème

Sous quelles conditions peuvent-ils LOCC-transformer $|\varphi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

Théorème (Nielsen '98)

L'état $|\varphi\rangle$ peut être transformé en l'état $|\psi\rangle$ par LOCC ssi

$$\lambda_\varphi \prec \lambda_\psi,$$

où "$\prec$" est la relation de domination et $\lambda_\varphi, \lambda_\psi$ sont les vecteurs des valeurs singulières de $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_A^* \otimes \mathcal{H}_B$.

La relation de domination

Définition

Soient $x, y \in \mathbb{R}_d^+$ deux vecteurs de probabilité. On dit que x est dominé par y et on écrit $x \prec y$ si les (in)égalités suivantes sont satisfaites:

$$x_1^\downarrow \leqslant y_1^\downarrow$$
$$x_1^\downarrow + x_2^\downarrow \leqslant y_1^\downarrow + y_2^\downarrow$$
$$\cdots$$
$$x_1^\downarrow + x_2^\downarrow + \ldots + x_{d-1}^\downarrow \leqslant y_1^\downarrow + y_2^\downarrow + \ldots + y_{d-1}^\downarrow$$
$$x_1^\downarrow + x_2^\downarrow + \ldots + x_d^\downarrow = y_1^\downarrow + y_2^\downarrow + \ldots + y_d^\downarrow$$

La relation de domination

Définition

Soient $x, y \in \mathbb{R}_d^+$ deux vecteurs de probabilité. On dit que x est dominé par y et on écrit $x \prec y$ si les (in)égalités suivantes sont satisfaites:

$$x_1^\downarrow \leqslant y_1^\downarrow$$
$$x_1^\downarrow + x_2^\downarrow \leqslant y_1^\downarrow + y_2^\downarrow$$
$$\cdots$$
$$x_1^\downarrow + x_2^\downarrow + \ldots + x_{d-1}^\downarrow \leqslant y_1^\downarrow + y_2^\downarrow + \ldots + y_{d-1}^\downarrow$$
$$x_1^\downarrow + x_2^\downarrow + \ldots + x_d^\downarrow = y_1^\downarrow + y_2^\downarrow + \ldots + y_d^\downarrow$$

- La relation "$\prec$" est un ordre partiel sur les vecteurs de probabilité; les éléments minimum et maximum sont $(1/d, \ldots, 1/d)$, resp. $(1, 0, \ldots, 0)$.

La relation de domination

Définition

Soient $x, y \in \mathbb{R}_d^+$ deux vecteurs de probabilité. On dit que x est dominé par y et on écrit $x \prec y$ si les (in)égalités suivantes sont satisfaites:

$$\begin{aligned}
x_1^\downarrow &\leqslant y_1^\downarrow \\
x_1^\downarrow + x_2^\downarrow &\leqslant y_1^\downarrow + y_2^\downarrow \\
&\cdots \\
x_1^\downarrow + x_2^\downarrow + \ldots + x_{d-1}^\downarrow &\leqslant y_1^\downarrow + y_2^\downarrow + \ldots + y_{d-1}^\downarrow \\
x_1^\downarrow + x_2^\downarrow + \ldots + x_d^\downarrow &= y_1^\downarrow + y_2^\downarrow + \ldots + y_d^\downarrow
\end{aligned}$$

- La relation "$\prec$" est un ordre partiel sur les vecteurs de probabilité; les éléments minimum et maximum sont $(1/d, \ldots, 1/d)$, resp. $(1, 0, \ldots, 0)$.
- $x \prec y$ est équivalent à
  - $x \in \operatorname{conv}\{\sigma \cdot y,\, \sigma \in \mathcal{S}_d\}$
  - il existe une matrice bistochastique B telle que $x = By$
  - $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^d |x_i - t| \leqslant \sum_{i=1}^d |y_i - t|$.

Catalyse quantique

- Jonathan et Plenio [98]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.

Catalyse quantique

- Jonathan et Plenio [98]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\varphi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle \to |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.

Catalyse quantique

- Jonathan et Plenio [98]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\varphi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle \to |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels que l'on n'ait pas $x \prec y$ mais on ait $x \otimes z \prec y \otimes z$.

Catalyse quantique

- Jonathan et Plenio [98]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\varphi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle \to |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels que l'on n'ait pas $x \prec y$ mais on ait $x \otimes z \prec y \otimes z$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Catalyse quantique

- Jonathan et Plenio [98]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\varphi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle \to |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels que l'on n'ait pas $x \prec y$ mais on ait $x \otimes z \prec y \otimes z$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilité. On dit que x est *ELOCC*-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

$$T_d(y) = \{x \in P_d \,|\, \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\}.$$

Catalyse quantique

- Jonathan et Plenio [98]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\varphi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle \to |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels que l'on n'ait pas $x \prec y$ mais on ait $x \otimes z \prec y \otimes z$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilité. On dit que x est *ELOCC*-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

$$T_d(y) = \{x \in P_d \,|\, \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\}.$$

- Pour tout $y \in P_d$, $T_d(y)$ est un ensemble convexe, mais, en général, il n'est ni ouvert, ni fermé.

Catalyse par copies multiples

- Bandyopadhyay et al. [02]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.

Catalyse par copies multiples

- Bandyopadhyay et al. [02]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\varphi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\varphi\rangle^{\otimes n} \to |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible. Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels que l'on n'ait pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geqslant 2$, on ait $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.

Catalyse par copies multiples

- Bandyopadhyay et al. [02]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\varphi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\varphi\rangle^{\otimes n} \to |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible. Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels que l'on n'ait pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geqslant 2$, on ait $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Catalyse par copies multiples

- Bandyopadhyay et al. [02]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\varphi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\varphi\rangle^{\otimes n} \to |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible. Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels que l'on n'ait pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geqslant 2$, on ait $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilité. On dit que x est *MLOCC*-dominé par y s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

$$M_d(y) = \{x \in P_d \,|\, \exists n \geqslant 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

Catalyse par copies multiples

- Bandyopadhyay et al. [02]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\varphi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\varphi\rangle^{\otimes n} \to |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible. Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels que l'on n'ait pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geqslant 2$, on ait $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilité. On dit que x est *MLOCC*-dominé par y s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

$$M_d(y) = \{x \in P_d \,|\, \exists n \geqslant 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- En général, $M_d(y)$ n'est ni ouvert, ni fermé, et on ignore encore s'il est convexe ou non.

Catalyse par copies multiples

- Bandyopadhyay et al. [02]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\varphi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\varphi\rangle^{\otimes n} \to |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible. Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels que l'on n'ait pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geqslant 2$, on ait $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilité. On dit que x est *MLOCC*-dominé par y s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

$$M_d(y) = \{x \in P_d \,|\, \exists n \geqslant 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- En général, $M_d(y)$ n'est ni ouvert, ni fermé, et on ignore encore s'il est convexe ou non.
- Pour tout $y \in P_d$, $S_d(y) \subseteq M_d(y) \subseteq T_d(y)$.

La “conjecture” de Nielsen

Conjecture (Nielsen)

Soient $x, y \in P_d$ *des vecteurs de probabilité. Alors* $x \in \overline{T_d(y)}$ *ssi les conditions suivantes sont satisfaites:*

1. $\forall p \geqslant 1,\ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$;
2. $\forall 0 \leqslant p \leqslant 1,\ \|x\|_p \geqslant \|y\|_p$;
3. $\forall p \leqslant 0,\ \|x\|_p \geqslant \|y\|_p$.

Les “normes” ℓ_p *sont définies par* $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p}$*, avec* $\|x\|_0 = \#\{x_i > 0\}$.

La "conjecture" de Nielsen

Conjecture (Nielsen)

Soient $x, y \in P_d$ des vecteurs de probabilité. Alors $x \in \overline{T_d(y)}$ ssi les conditions suivantes sont satisfaites:

1. $\forall p \geqslant 1,\ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$;
2. $\forall 0 \leqslant p \leqslant 1,\ \|x\|_p \geqslant \|y\|_p$;
3. $\forall p \leqslant 0,\ \|x\|_p \geqslant \|y\|_p$.

Les "normes" ℓ_p sont définies par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p}$, *avec* $\|x\|_0 = \#\{x_i > 0\}$.

- Le sens "$x \in \overline{T_d(y)} \Rightarrow$ inégalités" est une conséquence directe de la convexité/concavité des fonctions $t \mapsto t^p$ pour $p \in \mathbb{R}$ et du fait que les normes ℓ_p sont multiplicatives.

La "conjecture" de Nielsen

Conjecture (Nielsen)

Soient $x, y \in P_d$ des vecteurs de probabilité. Alors $x \in \overline{T_d(y)}$ ssi les conditions suivantes sont satisfaites:

1. $\forall p \geqslant 1,\ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$;
2. $\forall 0 \leqslant p \leqslant 1,\ \|x\|_p \geqslant \|y\|_p$;
3. $\forall p \leqslant 0,\ \|x\|_p \geqslant \|y\|_p$.

Les "normes" ℓ_p sont définies par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p}$, avec $\|x\|_0 = \#\{x_i > 0\}$.

- Le sens "$x \in \overline{T_d(y)} \Rightarrow$ inégalités" est une conséquence directe de la convexité/concavité des fonctions $t \mapsto t^p$ pour $p \in \mathbb{R}$ et du fait que les normes ℓ_p sont multiplicatives.
- Nos résultats: transformations MLOCC possibles sous des hypothèses plus faibles ($p \geqslant 1$ ou $p \geqslant 0$).

La "conjecture" de Nielsen

Conjecture (Nielsen)

Soient $x, y \in P_d$ des vecteurs de probabilité. Alors $x \in \overline{T_d(y)}$ ssi les conditions suivantes sont satisfaites:

1. $\forall p \geqslant 1,\ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$;
2. $\forall 0 \leqslant p \leqslant 1,\ \|x\|_p \geqslant \|y\|_p$;
3. $\forall p \leqslant 0,\ \|x\|_p \geqslant \|y\|_p$.

Les "normes" ℓ_p sont définies par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p}$, avec $\|x\|_0 = \#\{x_i > 0\}$.

- Le sens "$x \in \overline{T_d(y)} \Rightarrow$ inégalités" est une conséquence directe de la convexité/concavité des fonctions $t \mapsto t^p$ pour $p \in \mathbb{R}$ et du fait que les normes ℓ_p sont multiplicatives.
- Nos résultats: transformations MLOCC possibles sous des hypothèses plus faibles ($p \geqslant 1$ ou $p \geqslant 0$).
- La conjecture a été démontrée par S. Turgut par des techniques d'approximation et d'algèbre élémentaire.

La "conjecture" de Nielsen

Conjecture (Nielsen)

Soient $x, y \in P_d$ des vecteurs de probabilité. Alors $x \in \overline{T_d(y)}$ ssi les conditions suivantes sont satisfaites:

1. $\forall p \geqslant 1,\ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$;
2. $\forall 0 \leqslant p \leqslant 1,\ \|x\|_p \geqslant \|y\|_p$;
3. $\forall p \leqslant 0,\ \|x\|_p \geqslant \|y\|_p$.

Les "normes" ℓ_p sont définies par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p}$, avec $\|x\|_0 = \#\{x_i > 0\}$.

- Le sens "$x \in \overline{T_d(y)} \Rightarrow$ inégalités" est une conséquence directe de la convexité/concavité des fonctions $t \mapsto t^p$ pour $p \in \mathbb{R}$ et du fait que les normes ℓ_p sont multiplicatives.
- Nos résultats: transformations MLOCC possibles sous des hypothèses plus faibles ($p \geqslant 1$ ou $p \geqslant 0$).
- La conjecture a été démontrée par S. Turgut par des techniques d'approximation et d'algèbre élémentaire.
- La question analogue pour $\overline{M_d(y)}$ reste ouverte.

Notre approche

- A tout vecteur de probabilité $x = (x_1, \ldots, x_d)$, on associe la mesure

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{d} x_i \delta$$

Notre approche

- A tout vecteur de probabilité $x = (x_1, \ldots, x_d)$, on associe la mesure

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{d} x_i \delta_{\log x_i}.$$

- Le produit tensoriel des vecteurs correspond à la convolution des mesures: $\mu_{x \otimes y} = \mu_x * \mu_y$.

Notre approche

- A tout vecteur de probabilité $x = (x_1, \ldots, x_d)$, on associe la mesure

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{d} x_i \delta_{\log x_i}.$$

- Le produit tensoriel des vecteurs correspond à la convolution des mesures: $\mu_{x \otimes y} = \mu_x * \mu_y$.

Définition

Pour des mesures μ et ν sur $\mathbb{R}$, on dit que μ est stochastiquement dominée par ν si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mu[t, \infty) \leqslant \nu[t, \infty)$. On écrit $\mu \leqslant_{\mathrm{st}} \nu$.

Notre approche

- A tout vecteur de probabilité $x = (x_1, \ldots, x_d)$, on associe la mesure

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{d} x_i \delta_{\log x_i}.$$

- Le produit tensoriel des vecteurs correspond à la convolution des mesures: $\mu_{x \otimes y} = \mu_x * \mu_y$.

Définition

Pour des mesures μ et ν sur $\mathbb{R}$, on dit que μ est stochastiquement dominée par ν si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mu[t, \infty) \leqslant \nu[t, \infty)$. On écrit $\mu \leqslant_{\mathrm{st}} \nu$.

Proposition

Soient x et y des vecteurs de probabilité et μ_x, μ_y les mesures associées à x et à y. Alors

$$x \prec y \Leftarrow \mu_x \leqslant_{\mathrm{st}} \mu_y.$$

Les résultats

- Technique: Grandes déviations pour comparer μ_x^{*n} et μ_y^{*n}.

Les résultats

- Technique: Grandes déviations pour comparer μ_x^{*n} et μ_y^{*n}.
- Une mesure de probabilité μ est dite exponentiellement intégrable si $\int e_\lambda d\mu < +\infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, où $e_\lambda(x) = \exp(\lambda x)$.

Les résultats

- Technique: Grandes déviations pour comparer μ_x^{*n} et μ_y^{*n}.
- Une mesure de probabilité μ est dite exponentiellement intégrable si $\int e_\lambda d\mu < +\infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, où $e_\lambda(x) = \exp(\lambda x)$.

Théorème

Soient μ et ν des mesures de probabilité exponentiellement intégrables. Si les inégalités suivantes sont satisfaites

1. $\forall \lambda > 0, \quad \int e_\lambda d\mu < \int e_\lambda d\nu;$
2. $\forall \lambda < 0, \quad \int e_\lambda d\nu < \int e_\lambda d\mu;$
3. $\int x d\mu(x) < \int x d\nu(x);$
4. $\max \mu < \max \nu;$
5. $\min \mu < \min \nu,$

alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\mu^{*n} \leqslant_{\text{st}} \nu^{*n}$.

Les résultats

Théorème

Soient $x, y \in P_{<\infty}$ *deux vecteurs de probabilité. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $\forall p \geqslant 1, \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$,
2. $x \in \overline{M_{<\infty}(y)}$,
3. $x \in \overline{T_{<\infty}(y)}$.

Les résultats

Théorème

Soient $x, y \in P_{<\infty}$ *deux vecteurs de probabilité. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $\forall p \geqslant 1, \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$,
2. $x \in \overline{M_{<\infty}(y)}$,
3. $x \in \overline{T_{<\infty}(y)}$.

Théorème

Soient $x, y \in P_{<\infty}$ *deux vecteurs de probabilité. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $\forall p \geqslant 1,\ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$ *et* $\forall 0 \leqslant p \leqslant 1,\ \|x\|_p \geqslant \|y\|_p$,
2. $x \in \overline{M_{d+1}(y)}$,
3. $x \in \overline{T_{d+1}(y)}$.

Approximation de l'espace de Fock libre

Motivations & résultats

- S. Attal a construit une approximation de l'espace de Fock symétrique $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}_+))$ par un produit tensoriel dénombrable de copies de $\mathbb{C}^2$.
  - espace de Fock symétrique = produit tensoriel "continu" de copies de $\mathbb{C}^2$
  - approximation des opérateurs standards: création, annihilation, jauge
  - applications à la théorie des interactions quantiques répétées
  - interprétation probabiliste
  - approximation des bruits classiques (mouvement brownien et processus de Poisson).

Motivations & résultats

- S. Attal a construit une approximation de l'espace de Fock symétrique $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}_+))$ par un produit tensoriel dénombrable de copies de $\mathbb{C}^2$.
  - espace de Fock symétrique = produit tensoriel "continu" de copies de $\mathbb{C}^2$
  - approximation des opérateurs standards: création, annihilation, jauge
  - applications à la théorie des interactions quantiques répétées
  - interprétation probabiliste
  - approximation des bruits classiques (mouvement brownien et processus de Poisson).

- Motivation: construction analogue pour l'espace de Fock libre $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}_+))$.

Motivations & résultats

- S. Attal a construit une approximation de l'espace de Fock symétrique $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}_+))$ par un produit tensoriel dénombrable de copies de $\mathbb{C}^2$.
  - espace de Fock symétrique = produit tensoriel "continu" de copies de $\mathbb{C}^2$
  - approximation des opérateurs standards: création, annihilation, jauge
  - applications à la théorie des interactions quantiques répétées
  - interprétation probabiliste
  - approximation des bruits classiques (mouvement brownien et processus de Poisson).
- Motivation: construction analogue pour l'espace de Fock libre $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}_+))$.
- Résultats obtenus:
  - espace de Fock libre = produit libre "continu" de copies de $\mathbb{C}^2$
  - approximation de l'espace et des opérateurs standards
  - interprétation probabiliste
  - approximation des bruits libres (mouvement brownien libre et processus de Poisson libre)

Liberté asymptotique dans l'algèbre du groupe symétrique

Le cadre

- Soit $\mathcal{S}$ le groupe des permutation à support fini de $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. L'espace de probabilité non commutatif qui nous intéresse est donné par l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ avec sa trace canonique

$$\varphi\left(\sum_{\sigma} x_\sigma \sigma\right) = x_e,$$

où e est la permutation identité.

Le cadre

- Soit $\mathcal{S}$ le groupe des permutation à support fini de $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. L'espace de probabilité non commutatif qui nous intéresse est donné par l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ avec sa trace canonique

$$\varphi\left(\sum_{\sigma} x_\sigma \sigma\right) = x_e,$$

  où e est la permutation identité.
- Pour tout $r, n \geqslant 1$ et $t \in [0, \infty)$, on définit la variable aléatoire

$$M_r(n,t) = \frac{1}{n^{r/2}} \sum \underbrace{(0 a_1 a_2 \cdots a_r)}_{\substack{\text{le cycle} \\ 0 \to a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_r \to 0}},$$

  où on somme sur tous les r-uplets $(a_1, \ldots, a_r)$ d'entiers distincts de $[1, nt]$.

Le résultat

Théorème

La distribution non-commutative de la famille $(M_r(n,t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *converge, quand* $n \to \infty$*, vers la distribution d'une famille* $(M_r(t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *telle que*

Le résultat

Théorème

La distribution non-commutative de la famille $(M_r(n,t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *converge, quand* $n \to \infty$, *vers la distribution d'une famille* $(M_r(t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *telle que*

- $(M_1(t))_{t\in[0,+\infty)}$ *est un mouvement Brownien libre (le résultat original de P. Biane);*

Le résultat

Théorème

La distribution non-commutative de la famille $(M_r(n,t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *converge, quand* $n\to\infty$, *vers la distribution d'une famille* $(M_r(t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *telle que*

- $(M_1(t))_{t\in[0,+\infty)}$ *est un mouvement Brownien libre (le résultat original de P. Biane);*
- *Pour tout* r, t, *on a*

$$M_r(t) = t^{\frac{r}{2}} U_r(t^{-1/2} M_1(t)),$$

où les U_r *sont les polynômes de Chebyshev de seconde espèce.*

Le résultat

Théorème

La distribution non-commutative de la famille $(M_r(n,t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *converge, quand* $n\to\infty$*, vers la distribution d'une famille* $(M_r(t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *telle que*

- $(M_1(t))_{t\in[0,+\infty)}$ *est un mouvement Brownien libre (le résultat original de P. Biane);*
- *Pour tout* r, t*, on a*

$$M_r(t) = t^{\frac{r}{2}} U_r(t^{-1/2} M_1(t)),$$

où les U_r *sont les polynômes de Chebyshev de seconde espèce.*

Corollaire

Soient E_A, E_B *des intervalles disjoints de* n *entiers consécutifs. Alors les éléments* $A(n), B(n) \in \mathbb{C}[\mathcal{S}]$ *suivants sont asymptotiquement libres quand* $n\to\infty$*:*

$$A(n) := \sum_{a_1,\ldots,a_{r_a}\in E_A} (0 a_1 \cdots a_{r_a}), \quad B(n) := \sum_{b_1,\ldots,b_{r_b}\in E_B} (0 b_1 \cdots b_{r_b}).$$

La combinatoire du cas libre

- On pose $t = 1$ et on note $M_r = M_r(1)$.

La combinatoire du cas libre

- On pose $t = 1$ et on note $M_r = M_r(1)$.
- Pour un vecteur d'entiers positifs $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_p)$ on pose $|\vec{r}| = r_1 + \ldots + r_p$.

La combinatoire du cas libre

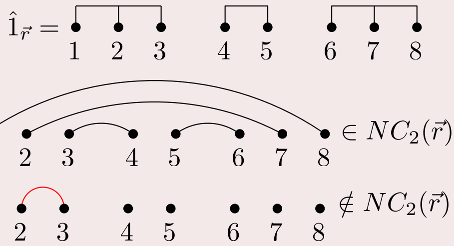
- On pose $t = 1$ et on note $M_r = M_r(1)$.
- Pour un vecteur d'entiers positifs $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_p)$ on pose $|\vec{r}| = r_1 + \ldots + r_p$.
- On introduit les deux familles suivantes de partitions en paires non-croisées:

La combinatoire du cas libre

- On pose $t = 1$ et on note $M_r = M_r(1)$.
- Pour un vecteur d'entiers positifs $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_p)$ on pose $|\vec{r}| = r_1 + \ldots + r_p$.
- On introduit les deux familles suivantes de partitions en paires non-croisées:

$$NC_2(\vec{r}) = \{\pi \in NC_2(|\vec{r}|) \mid \pi \wedge \hat{1}_{\vec{r}} = \hat{0}_{|\vec{r}|}\};$$

Pour $\vec{r} = (3, 2, 3)$,

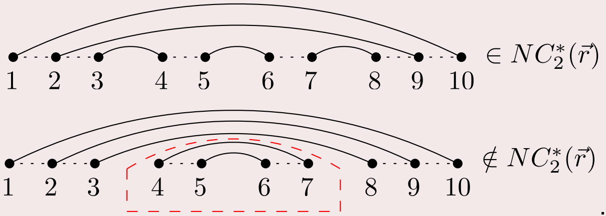


.

La combinatoire du cas libre

$$NC_2^*(\vec{r}) = \{\pi \in NC_2(\vec{r}) \mid \pi \vee \hat{1}_{\vec{r}} = \hat{1}_{|\vec{r}|}\}.$$

Pour $\vec{r} = (3,2,2,3)$,

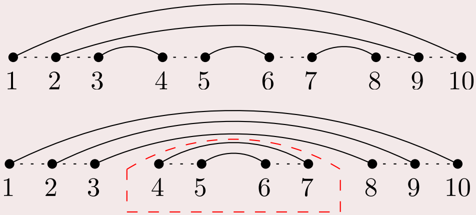


.

La combinatoire du cas libre

$$NC_2^*(\vec{r}) = \{\pi \in NC_2(\vec{r}) \mid \pi \vee \hat{1}_{\vec{r}} = \hat{1}_{|\vec{r}|}\}.$$

Pour $\vec{r} = (3, 2, 2, 3)$,



$\in NC_2^*(\vec{r})$

$\notin NC_2^*(\vec{r})$

.

Théorème

La distribution non-commutative de la famille $(M_r)_{r\geqslant 1}$ est caractérisée par ses moments $\varphi(M_{r_1} M_{r_2} \cdots M_{r_p}) = \#NC_2(\vec{r})$ ou par ses cumulants libres $\kappa_p(M_{r_1}, M_{r_2}, \ldots, M_{r_p}) = \#NC_2^*(\vec{r})$.

Le cas commutatif

- Idée: remplacer les permutations par des ensembles:

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) \rightsquigarrow \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$$

Le cas commutatif

- Idée: remplacer les permutations par des ensembles:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_r) \rightsquigarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$$

- Soit $\mathcal{G}$ le groupe de sous-ensembles finis d'entiers muni de d'opération de différence symétrique Δ. Considérons l'espace de probabilité non-commutatif commutatif $(\mathbb{C}[\mathcal{G}], \psi)$, où ψ est la trace canonique définie par

$$\psi\left(\sum_A x_A A\right) = x_\emptyset.$$

Le cas commutatif

- Idée: remplacer les permutations par des ensembles:

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) \rightsquigarrow \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$$

- Soit $\mathcal{G}$ le groupe de sous-ensembles finis d'entiers muni de d'opération de différence symétrique Δ. Considérons l'espace de probabilité non-commutatif commutatif $(\mathbb{C}[\mathcal{G}], \psi)$, où ψ est la trace canonique définie par

$$\psi\left(\sum_A x_A A\right) = x_\emptyset .$$

- Pour tout $r, n \geqslant 1$ et $t \in [0, \infty)$, on définit la variable aléatoire

$$L_r(n,t) = \frac{1}{n^{r/2}} \sum \{a_1, a_2, \dots, a_r\},$$

où on somme sur tous les r-uplets $(a_1, \dots, a_r)$ d'entiers distincts de $[1, nt]$.

Le résultat principal (cas commutatif)

Théorème

La distribution (non-commutative) de la famille $(L_r(n,t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *converge, quand* $n\to\infty$*, vers la distribution d'une famille* $(L_r(t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *telle que* $(L_1(t))_{t\in[0,+\infty)}$ *est un mouvement Brownien (classique) et pour tout* r, t*, on a*

$$L_r(t) = t^{\frac{r}{2}} H_r(t^{-1/2} L_1(t)),$$

où les H_r *sont les polynômes d'Hermite.*

Le résultat principal (cas commutatif)

Théorème

La distribution (non-commutative) de la famille $(L_r(n,t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *converge, quand* $n\to\infty$*, vers la distribution d'une famille* $(L_r(t))_{r\geqslant 1, t\in[0,+\infty)}$ *telle que* $(L_1(t))_{t\in[0,+\infty)}$ *est un mouvement Brownien (classique) et pour tout* r, t*, on a*

$$L_r(t) = t^{\frac{r}{2}} H_r(t^{-1/2} L_1(t)),$$

où les H_r *sont les polynômes d'Hermite.*

Théorème

Les moments et les cumulants classiques de la famille $(L_r)_{r\geqslant 1}$ *sont donnés par* $\psi(L_{r_1} L_{r_2} \cdots L_{r_p}) = \#\Pi_2(\vec{r})$ *et* $c_p(L_{r_1}, L_{r_2}, \ldots, L_{r_p}) = \#\Pi_2^*(\vec{r})$*, où les ensembles* $\Pi_2(\vec{r})$ *et* $\Pi_2^*(\vec{r})$ *sont obtenus à partir du cas libre en considérant des partitions (éventuellement) croisées.*

Travaux en cours
et
perspectives

Travaux en cours

- Canaux quantiques aléatoires (*avec Benoît Collins*)
  - propriétés spectrales de la sortie des (produits de) canaux aléatoires
  - conjecture d'additivité

Travaux en cours

- Canaux quantiques aléatoires (*avec Benoît Collins*)
    - propriétés spectrales de la sortie des (produits de) canaux aléatoires
    - conjecture d'additivité
- Limite continue des interactions quantiques répétées en environnement aléatoire (*avec Clément Pellegrini*)
    - généralisation des trajectoires quantiques en environnement aléatoire
    - plusieurs bruits

Travaux en cours

- Canaux quantiques aléatoires (*avec Benoît Collins*)
  - propriétés spectrales de la sortie des (produits de) canaux aléatoires
  - conjecture d'additivité
- Limite continue des interactions quantiques répétées en environnement aléatoire (*avec Clément Pellegrini*)
  - généralisation des trajectoires quantiques en environnement aléatoire
  - plusieurs bruits
- Problèmes d'évitement en théorie quantique de l'information (*avec Guillaume Aubrun*)
  - cadre unifié pour traiter (quantitativement!) des problèmes d'existence en TQI
  - théorème d'intersection des variétés algébriques projectives

Perspectives

- Etudier les propriétés spectrales de l'ensemble "asymptotique" des matrices densités aléatoires
  - support de la mesure
  - moments, entropie, etc
  - existence d'une limite quand les dimensions des systèmes deviennent grandes

Perspectives

- Etudier les propriétés spectrales de l'ensemble "asymptotique" des matrices densités aléatoires
  - support de la mesure
  - moments, entropie, etc
  - existence d'une limite quand les dimensions des systèmes deviennent grandes

- Etudier quantitativement les différents modèles des canaux quantiques aléatoires
  - support, différentes notions d'entropie
  - rang de Kraus, stricte positivité
  - comportement des itérés

Perspectives

- Etudier les propriétés spectrales de l'ensemble "asymptotique" des matrices densités aléatoires
  - support de la mesure
  - moments, entropie, etc
  - existence d'une limite quand les dimensions des systèmes deviennent grandes

- Etudier quantitativement les différents modèles des canaux quantiques aléatoires
  - support, différentes notions d'entropie
  - rang de Kraus, stricte positivité
  - comportement des itérés

- Les processus qu'on obtient dans le modèle de permutations sont des intégrales stochastiques multiples (classiques ou libres)
  - généraliser ces idées dans l'esprit de l'approche combinatoire au calcul stochastique (Rota & Wallstrom)
  - discrétisation du calcul stochastique
  - modèles similaires pour d'autres types d'indépendance

États aléatoires, théorie quantique de l'information et probabilités libres

Ion Nechita

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

Lyon, 24 Mars 2009