

Modèles des matrices aléatoires en théorie quantique de l'information

Ion Nechita

Université d'Ottawa

travaux en collaboration avec Serban Belinschi, Benoît Collins, Clément Pellegrini et Karol Życzkowski

LPT Toulouse, 30 Mars 2010

Matrices densités aléatoires

— l'ensemble “induit” —

États purs aléatoires et l'ensemble "induit"

- On s'intéresse aux systèmes quantiques avec un nombre fini de degrés de liberté $\leadsto$ tous les espaces de Hilbert qu'on considère seront de dimension finie.

États purs aléatoires et l'ensemble "induit"

- On s'intéresse aux systèmes quantiques avec un nombre fini de degrés de liberté $\leadsto$ tous les espaces de Hilbert qu'on considère seront de dimension finie.
- Un **état pur aléatoire** dans $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ est un point uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{C}^N$.

États purs aléatoires et l'ensemble "induit"

- On s'intéresse aux systèmes quantiques avec un nombre fini de degrés de liberté $\leadsto$ tous les espaces de Hilbert qu'on considère seront de dimension finie.
- Un **état pur aléatoire** dans $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ est un point uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{C}^N$.
- On peut générer un état quantique pur ayant cette distribution en normalisant un vecteur de N variable aléatoires Gaussiennes complexes i.i.d.

États purs aléatoires et l'ensemble "induit"

- On s'intéresse aux systèmes quantiques avec un nombre fini de degrés de liberté $\leadsto$ tous les espaces de Hilbert qu'on considère seront de dimension finie.
- Un **état pur aléatoire** dans $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ est un point uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{C}^N$.
- On peut générer un état quantique pur ayant cette distribution en normalisant un vecteur de N variable aléatoires Gaussiennes complexes i.i.d.
- Matrices densités aléatoires : plusieurs choix naturels d'une mesure de probabilité.

États purs aléatoires et l'ensemble "induit"

- On s'intéresse aux systèmes quantiques avec un nombre fini de degrés de liberté $\leadsto$ tous les espaces de Hilbert qu'on considère seront de dimension finie.
- Un **état pur aléatoire** dans $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ est un point uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{C}^N$.
- On peut générer un état quantique pur ayant cette distribution en normalisant un vecteur de N variable aléatoires Gaussiennes complexes i.i.d.
- Matrices densités aléatoires : plusieurs choix naturels d'une mesure de probabilité.
- L'**ensemble induit** : prendre la trace partielle sur l'**environnement** d'un état pur aléatoire sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$:

$$\rho = \text{Tr}_{\mathcal{K}} |\psi\rangle\langle\psi|,$$

où $|\psi\rangle$ est un état pur aléatoire dans $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^K$.

États purs aléatoires et l'ensemble "induit"

- On s'intéresse aux systèmes quantiques avec un nombre fini de degrés de liberté $\leadsto$ tous les espaces de Hilbert qu'on considère seront de dimension finie.
- Un **état pur aléatoire** dans $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ est un point uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{C}^N$.
- On peut générer un état quantique pur ayant cette distribution en normalisant un vecteur de N variable aléatoires Gaussiennes complexes i.i.d.
- Matrices densités aléatoires : plusieurs choix naturels d'une mesure de probabilité.
- L'**ensemble induit** : prendre la trace partielle sur l'**environnement** d'un état pur aléatoire sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$:

$$\rho = \text{Tr}_{\mathcal{K}} |\psi\rangle\langle\psi|,$$

où $|\psi\rangle$ est un état pur aléatoire dans $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^K$.

- Formule explicite pour la densité des valeurs propres de $\rho \leadsto$ **pureté** et **entropie** moyennes:

$$\langle \text{Tr} \rho^2 \rangle = \frac{N+K}{NK+1}, \quad \langle H(\rho) \rangle = \langle -\text{Tr} \rho \log \rho \rangle = \Psi(NK+1) - \Psi(K+1) - \frac{N-1}{2K}.$$

Ensemble induit - régimes asymptotiques

I) N fixé, $K \rightarrow \infty$

Ensemble induit - régimes asymptotiques

I) N fixé, $K \rightarrow \infty$

- Les N valeurs propres de N convergent vers $1/N$

Ensemble induit - régimes asymptotiques

I) N fixé, $K \rightarrow \infty$

- Les N valeurs propres de N convergent vers $1/N \rightsquigarrow \rho$ converge vers l'état maximalement mélangé $\rho_* = I_N / N$.

Ensemble induit - régimes asymptotiques

I) N fixé, $K \rightarrow \infty$

- Les N valeurs propres de N convergent vers $1/N \rightsquigarrow \rho$ converge vers l'état maximalement mélangé $\rho_* = I_N / N$.
- L'entropie converge vers sa valeur maximale, $\log N$.

Ensemble induit - régimes asymptotiques

I) N fixé, $K \rightarrow \infty$

- Les N valeurs propres de N convergent vers $1/N \rightsquigarrow \rho$ converge vers l'état maximalement mélangé $\rho_* = I_N / N$.
- L'entropie converge vers sa valeur maximale, $\log N$.

II) $N, K \rightarrow \infty$ à rapport constant $K/N \rightarrow c > 0$ [N. '08]

Ensemble induit - régimes asymptotiques

I) N fixé, $K \rightarrow \infty$

- Les N valeurs propres de N convergent vers $1/N \rightsquigarrow \rho$ converge vers l'état maximalement mélangé $\rho_* = I_N / N$.
- L'entropie converge vers sa valeur maximale, $\log N$.

II) $N, K \rightarrow \infty$ à rapport constant $K/N \rightarrow c > 0$ [N. '08]

- Dans la limite $N \rightarrow \infty$, $K \sim cN$, pour $c > 0$ fixé, la **distribution spectrale empirique** de la matrice renormalisée

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{cN\lambda_i}$$

Ensemble induit - régimes asymptotiques

I) N fixé, $K \rightarrow \infty$

- Les N valeurs propres de N convergent vers $1/N \rightsquigarrow \rho$ converge vers l'état maximalement mélangé $\rho_* = I_N / N$.
- L'entropie converge vers sa valeur maximale, $\log N$.

II) $N, K \rightarrow \infty$ à rapport constant $K/N \rightarrow c > 0$ [N. '08]

- Dans la limite $N \rightarrow \infty$, $K \sim cN$, pour $c > 0$ fixé, la **distribution spectrale empirique** de la matrice renormalisée

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{cN\lambda_i}$$

converge, presque sûrement, vers la loi de **Marchenko-Pastur** π_c .

Ensemble induit - régimes asymptotiques

I) N fixé, $K \rightarrow \infty$

- Les N valeurs propres de N convergent vers $1/N \rightsquigarrow \rho$ converge vers l'état maximalement mélangé $\rho_* = I_N / N$.
- L'entropie converge vers sa valeur maximale, $\log N$.

II) $N, K \rightarrow \infty$ à rapport constant $K/N \rightarrow c > 0$ [N. '08]

- Dans la limite $N \rightarrow \infty$, $K \sim cN$, pour $c > 0$ fixé, la **distribution spectrale empirique** de la matrice renormalisée

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{cN\lambda_i}$$

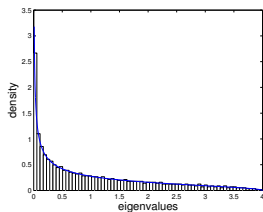
converge, presque sûrement, vers la loi de **Marchenko-Pastur** π_c .

- La distribution de Marchenko-Pastur (ou de Poisson **libre**) est donnée par

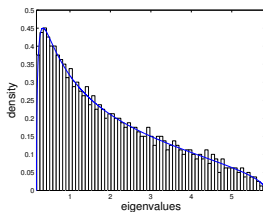
$$\pi_c = \max\{1 - c, 0\} \delta_0 + \frac{\sqrt{(x - a)(b - x)}}{2\pi x} \mathbf{1}_{[a, b]}(x) dx,$$

avec $a = (\sqrt{c} - 1)^2$ et $b = (\sqrt{c} + 1)^2$.

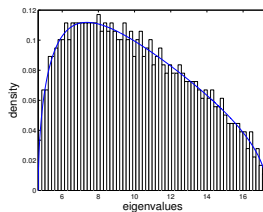
Ensemble induit - simulations numériques



(a)



(b)



(c)

Distribution spectrale empirique et limite pour **une** matrice dans l'ensemble induit, pour les paramètres

(a) $N = 1000, K = 1000 \rightsquigarrow c = 1$

(b) $N = 1000, K = 2000 \rightsquigarrow c = 2$

(c) $N = 1000, K = 10000 \rightsquigarrow c = 10$.

Matrices densités aléatoires

— l'ensemble “asymptotique” —

Canaux quantiques (aléatoires)

- Théorie classique de l'information (C. Shannon) : canal de communication classique (modélise le bruit) $\rightsquigarrow$ matrice stochastique.

Canaux quantiques (aléatoires)

- Théorie classique de l'information (C. Shannon) : canal de communication classique (modélise le bruit) $\leadsto$ matrice stochastique.
- Canal quantique: application **complètement positive**, qui **préserve la trace**
 $\Phi : \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.

Canaux quantiques (aléatoires)

- Théorie classique de l'information (C. Shannon) : canal de communication classique (modélise le bruit) $\leadsto$ matrice stochastique.
- Canal quantique: application **complètement positive**, qui **préserve la trace** $\Phi : \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.
- **Dilatation de Stinespring**: pour tout canal quantique, ils existent $K \in \mathbb{N}$, un état pur $|e\rangle \in \mathbb{C}^K$ et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{U}(NK)$ tels que

$$\Phi(X) = \text{Tr}_K [U(X \otimes |e\rangle\langle e|)U^*], \quad \forall X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}).$$

Canaux quantiques (aléatoires)

- Théorie classique de l'information (C. Shannon) : canal de communication classique (modélise le bruit) $\leadsto$ matrice stochastique.
- Canal quantique: application **complètement positive**, qui **préserve la trace** $\Phi : \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.
- **Dilatation de Stinespring**: pour tout canal quantique, ils existent $K \in \mathbb{N}$, un état pur $|e\rangle \in \mathbb{C}^K$ et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{U}(NK)$ tels que

$$\Phi(X) = \text{Tr}_K [U(X \otimes |e\rangle\langle e|)U^*], \quad \forall X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}).$$

- **Canal quantique aléatoire**: fixer K et $|e\rangle$, choisir U selon la mesure de Haar dans $\mathcal{U}(NK)$:

$$\mathcal{U}(NK) \ni U \mapsto \Phi_U = \text{Tr}_K [U(\cdot \otimes |e\rangle\langle e|)U^*]$$

Canaux quantiques (aléatoires)

- Théorie classique de l'information (C. Shannon) : canal de communication classique (modélise le bruit) $\leadsto$ matrice stochastique.
- Canal quantique: application **complètement positive**, qui **préserve la trace** $\Phi : \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.
- **Dilatation de Stinespring**: pour tout canal quantique, ils existent $K \in \mathbb{N}$, un état pur $|e\rangle \in \mathbb{C}^K$ et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{U}(NK)$ tels que

$$\Phi(X) = \text{Tr}_K [U(X \otimes |e\rangle\langle e|)U^*], \quad \forall X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}).$$

- **Canal quantique aléatoire**: fixer K et $|e\rangle$, choisir U selon la mesure de Haar dans $\mathcal{U}(NK)$:

$$\mathcal{U}(NK) \ni U \mapsto \Phi_U = \text{Tr}_K [U(\cdot \otimes |e\rangle\langle e|)U^*]$$

- Lien avec l'ensemble induit: si $|\psi_0\rangle \in \mathbb{C}^N$ est un état pur fixé, alors

$$\rho = \Phi(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|)$$

appartient à l'ensemble induit (c'est la trace partielle d'un état pur uniforme de $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^K$).

L'ensemble asymptotique

- L'ensemble induit = **une itération** d'un canal quantique aléatoire

$$\begin{aligned}\rho &= \text{Tr}_K[U(|\psi_0\rangle\langle\psi_0| \otimes |e\rangle\langle e|)U^*] \\ &= \Phi_U(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|).\end{aligned}$$

L'ensemble asymptotique

- L'ensemble induit = **une itération** d'un canal quantique aléatoire

$$\begin{aligned}\rho &= \text{Tr}_K[U(|\psi_0\rangle\langle\psi_0| \otimes |e\rangle\langle e|)U^*] \\ &= \Phi_U(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|).\end{aligned}$$

- Comportement après un **grand nombre d'itérations** ?

L'ensemble asymptotique

- L'ensemble induit = **une itération** d'un canal quantique aléatoire

$$\begin{aligned}\rho &= \text{Tr}_K[U(|\psi_0\rangle\langle\psi_0| \otimes |e\rangle\langle e|)U^*] \\ &= \Phi_U(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|).\end{aligned}$$

- Comportement après un **grand nombre d'itérations** ? Perron-Frobenius “quantique” $\leadsto$ pour presque tout U ,

$$(\Phi_U)^n(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \rho_\infty.$$

L'ensemble asymptotique

- L'ensemble induit = **une itération** d'un canal quantique aléatoire

$$\begin{aligned}\rho &= \text{Tr}_K[U(|\psi_0\rangle\langle\psi_0| \otimes |e\rangle\langle e|)U^*] \\ &= \Phi_U(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|).\end{aligned}$$

- Comportement après un **grand nombre d'itérations** ? Perron-Frobenius “quantique” $\leadsto$ pour presque tout U ,

$$(\Phi_U)^n(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho_\infty.$$

- Pour une matrice U de Haar, la distribution de ρ_∞ ne dépend pas de $|\psi_0\rangle$ et de $|e\rangle$.

L'ensemble asymptotique

- L'ensemble induit = **une itération** d'un canal quantique aléatoire

$$\begin{aligned}\rho &= \text{Tr}_K[U(|\psi_0\rangle\langle\psi_0| \otimes |e\rangle\langle e|)U^*] \\ &= \Phi_U(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|).\end{aligned}$$

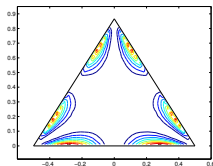
- Comportement après un **grand nombre d'itérations** ? Perron-Frobenius “quantique” $\leadsto$ pour presque tout U ,

$$(\Phi_U)^n(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \rho_\infty.$$

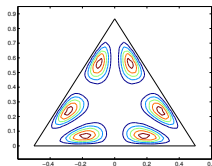
- Pour une matrice U de Haar, la distribution de ρ_∞ ne dépend pas de $|\psi_0\rangle$ et de $|e\rangle$.
- On vient de définir l'**ensemble asymptotique** [N., Pellegrini '09]

$$\mathcal{U}(NK) \ni U \mapsto \rho_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi_U)^n(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|).$$

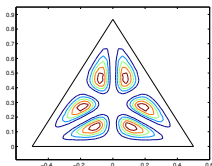
L'ensemble asymptotique - simulations numériques



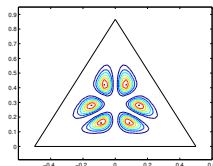
(d) $K = 3$



(e) $K = 5$



(f) $K = 3$



(g) $K = 5$

Valeurs propres pour $N = 3$: ensemble induit (première ligne) vs. ensemble asymptotique (deuxième ligne).

États quantiques aléatoires associés aux graphes

[Collins - N. - Życzkowski '10]

États purs associés aux graphes

- On considère un graphe Γ avec m arêtes $B_1, \dots, B_m$ et k sommets $V_1, \dots, V_k$.

États purs associés aux graphes

- On considère un graphe Γ avec m arêtes $B_1, \dots, B_m$ et k sommets $V_1, \dots, V_k$.
- À Γ on associe un état pur (déterministe) $|\tilde{\Psi}\rangle\langle\tilde{\Psi}| \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{2m}$:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \bigotimes_{\{i,j\} \text{ arête}} |\Phi_{ij}^+\rangle,$$

où $|\Phi_{ij}^+\rangle$ est un état maximalement intriqué $|\Phi_{ij}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_i N}} \sum_{x=1}^{d_i N} |e_x\rangle \otimes |f_x\rangle$.

États purs associés aux graphes

- On considère un graphe Γ avec m arêtes $B_1, \dots, B_m$ et k sommets $V_1, \dots, V_k$.
- À Γ on associe un état pur (déterministe) $|\tilde{\Psi}\rangle\langle\tilde{\Psi}| \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{2m}$:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \bigotimes_{\{i,j\} \text{ arête}} |\Phi_{ij}^+\rangle,$$

où $|\Phi_{ij}^+\rangle$ est un état maximalement intriqué $|\Phi_{ij}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_i N}} \sum_{x=1}^{d_i N} |e_x\rangle \otimes |f_x\rangle$.

- $\dim \mathcal{H}_i = d_i N$, avec d_i un paramètre fixé et $N \rightarrow \infty$. Pour toute arête $\{i, j\}$, on demande $d_i = d_j$.

États purs associés aux graphes

- On considère un graphe Γ avec m arêtes $B_1, \dots, B_m$ et k sommets $V_1, \dots, V_k$.
- À Γ on associe un état pur (déterministe) $|\tilde{\Psi}\rangle\langle\tilde{\Psi}| \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{2m}$:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \bigotimes_{\{i,j\} \text{ arête}} |\Phi_{ij}^+\rangle,$$

où $|\Phi_{ij}^+\rangle$ est un état maximalement intriqué $|\Phi_{ij}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_i N}} \sum_{x=1}^{d_i N} |e_x\rangle \otimes |f_x\rangle$.

- $\dim \mathcal{H}_i = d_i N$, avec d_i un paramètre fixé et $N \rightarrow \infty$. Pour toute arête $\{i, j\}$, on demande $d_i = d_j$.
- À chaque sommet de Γ , une matrice unitaire aléatoire de Haar agit sur les sous-systèmes contenus dans le sommet:

$$\bigotimes_{i=1}^{n=2m} \mathcal{H}_i \ni |\Psi_\Gamma\rangle = \left(\bigotimes_{C \text{ vertex}} U_C \right) |\tilde{\Psi}\rangle$$

États purs associés aux graphes

- On considère un graphe Γ avec m arêtes $B_1, \dots, B_m$ et k sommets $V_1, \dots, V_k$.
- À Γ on associe un état pur (déterministe) $|\tilde{\Psi}\rangle\langle\tilde{\Psi}| \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{2m}$:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \bigotimes_{\{i,j\} \text{ arête}} |\Phi_{ij}^+\rangle,$$

où $|\Phi_{ij}^+\rangle$ est un état maximalement intriqué $|\Phi_{ij}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_i N}} \sum_{x=1}^{d_i N} |e_x\rangle \otimes |f_x\rangle$.

- $\dim \mathcal{H}_i = d_i N$, avec d_i un paramètre fixé et $N \rightarrow \infty$. Pour toute arête $\{i, j\}$, on demande $d_i = d_j$.
- À chaque sommet de Γ , une matrice unitaire aléatoire de Haar agit sur les sous-systèmes contenus dans le sommet:

$$\bigotimes_{i=1}^{n=2m} \mathcal{H}_i \ni |\Psi_\Gamma\rangle = \left(\bigotimes_{C \text{ vertex}} U_C \right) |\tilde{\Psi}\rangle$$

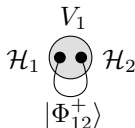
- Les matrices unitaires aléatoires $U_1, \dots, U_k$ sont indépendantes.

États purs associés aux graphes - exemples

V_1



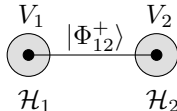
(h)



(i)



(j)



(k)

États graphes avec une arête. Première ligne: état pur uniforme dans $\mathbb{C}^{dN} \otimes \mathbb{C}^{dN}$.
Deuxième ligne: état maximalelement intriqué aléatoire.

Traces partielles d'états graphes

- On étudie l'intrication d'un état graphe $|\Psi\rangle$ par rapport à une partition $\{S, T\}$ de l'ensemble des $2m$ sous-systèmes.

Traces partielles d'états graphes

- On étudie l'intrication d'un état graphe $|\Psi\rangle$ par rapport à une partition $\{S, T\}$ de l'ensemble des $2m$ sous-systèmes.
- L'espace de Hilbert total se décompose comme $\mathcal{H} = \mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_S$.

Traces partielles d'états graphes

- On étudie l'intrication d'un état graphe $|\Psi\rangle$ par rapport à une partition $\{S, T\}$ de l'ensemble des $2m$ sous-systèmes.
- L'espace de Hilbert total se décompose comme $\mathcal{H} = \mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_S$.
- Nouveau ensemble de matrices densités aléatoires: marginales d'états graphes

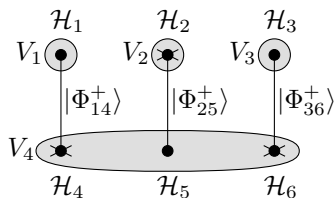
$$\rho_S = \text{Tr}_T |\Psi\rangle\langle\Psi|.$$

Traces partielles d'états graphes

- On étudie l'intrication d'un état graphe $|\Psi\rangle$ par rapport à une partition $\{S, T\}$ de l'ensemble des $2m$ sous-systèmes.
- L'espace de Hilbert total se décompose comme $\mathcal{H} = \mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_S$.
- Nouveau ensemble de matrices densités aléatoires: marginales d'états graphes

$$\rho_S = \text{Tr}_T |\Psi\rangle\langle\Psi|.$$

- Graphiquement, on met des croix $\times$ sur les sous-système qu'on trace:

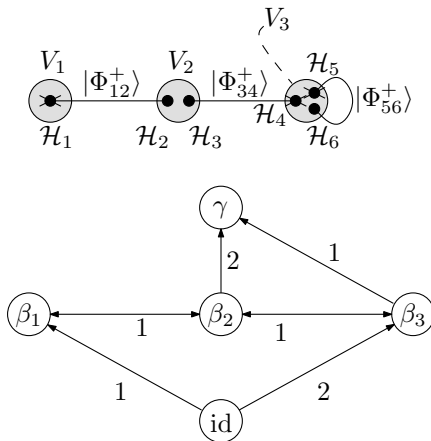


Réseau associé à une marginale

- À toute marginale ρ_S d'un état graphe on associé un **graphe de flot**.

Réseau associé à une marginale

- À toute marginale ρ_S d'un état graphe on associé un **graphe de flot**.
- Les capacités des arêtes dépendent de la structure du graphe initial et de la partition $\{S, T\}$.



Résultats principaux

Théorème

Asymptotiquement, lorsque $N \rightarrow \infty$, le p -ème moment de la marginale ρ_S se comporte comme

$$\mathbb{E} \text{Tr}(\rho_S^p) = N^{-X(p-1)} \cdot [\text{terme combinatoire} + o(1)],$$

où X est le flot maximal dans le réseau associé à la marginale. Le terme combinatoire s'exprime en fonction du réseau résiduel obtenu après avoir soustrait les capacités des arêtes participant au flux maximal.

Résultats principaux

Théorème

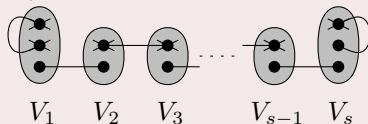
Asymptotiquement, lorsque $N \rightarrow \infty$, le p -ème moment de la marginale ρ_S se comporte comme

$$\mathbb{E} \text{Tr}(\rho_S^p) = N^{-X(p-1)} \cdot [\text{terme combinatoire} + o(1)],$$

où X est le flot maximal dans le réseau associé à la marginale. Le terme combinatoire s'exprime en fonction du réseau résiduel obtenu après avoir soustrait les capacités des arêtes participant au flux maximal.

Théorème

La distribution asymptotique des valeurs propres du graphe suivant généralise la loi de Marchenko-Pastur π_c :



Loi de surface pour les marginales “adaptées”

- Cadre: étudier l'intrication entre plusieurs systèmes avec des **interactions locales**.

Loi de surface pour les marginales “adaptées”

- Cadre: étudier l'intrication entre plusieurs systèmes avec des **interactions locales**.
- “Loi de surface” : l'entropie d'intrication d'une région d'un état fondamental croît comme surface de la région respective.

Loi de surface pour les marginales “adaptées”

- Cadre: étudier l'intrication entre plusieurs systèmes avec des **interactions locales**.
- “Loi de surface” : l'entropie d'intrication d'une région d'un état fondamental croît comme surface de la région respective.
- L'entropie d'intrication n'est pas une quantité extensive.

Loi de surface pour les marginales “adaptées”

- Cadre: étudier l'intrication entre plusieurs systèmes avec des **interactions locales**.
- “Loi de surface” : l'entropie d'intrication d'une région d'un état fondamental croît comme surface de la région respective.
- L'entropie d'intrication n'est pas une quantité extensive.
- Une marginale d'un état graphe ρ_S est dite **adaptée** si dans chaque sommet, le nombre des sous-systèmes tracés est soit nul, soit maximal.

Loi de surface pour les marginales “adaptées”

- Cadre: étudier l'intrication entre plusieurs systèmes avec des **interactions locales**.
- “Loi de surface” : l'entropie d'intrication d'une région d'un état fondamental croît comme surface de la région respective.
- L'entropie d'intrication n'est pas une quantité extensive.
- Une marginale d'un état graphe ρ_S est dite **adaptée** si dans chaque sommet, le nombre des sous-systèmes tracés est soit nul, soit maximal.

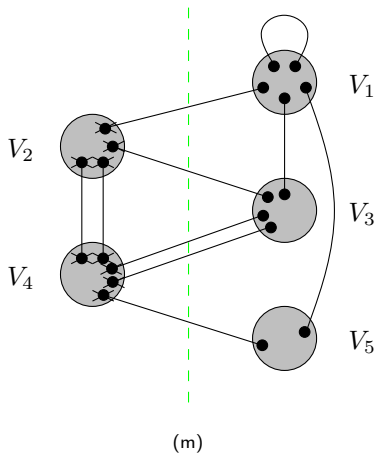
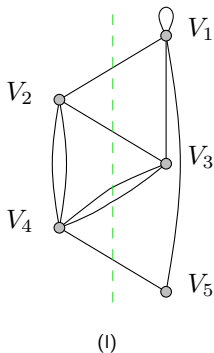
Théorème

Soit ρ_S une marginale adaptée d'un état graphe $|\Psi\rangle\langle\Psi|$. Alors

$$H(\rho_S) = |\partial S| \log N + O(1),$$

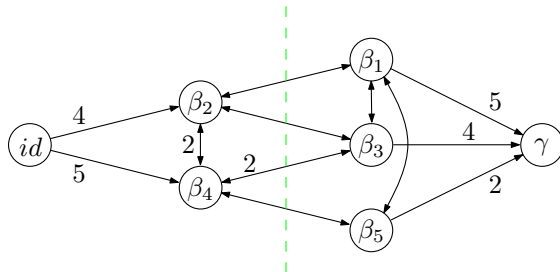
dans la limite $N \rightarrow \infty$. La **frontière** ∂S contient toutes les arêtes avec un sommet dans S et l'autre sommet dans T .

Loi de surface pour les marginales “adaptées”



Exemple d'un état graphe (a) avec une marginale adapté (b). La ligne verte represente la **frontière** entre les parties S et T .

Loi de surface pour les marginales “adaptées”



Le réseau associé à la marginale précédente. Les nœuds ne peuvent pas être connectés à la fois à la source et au puits. Le flot maximal dans le réseau est égal à la coupe minimale qu'on peut démontrer égale au cardinal de la frontière ∂S .

Canaux quantiques aléatoires et la conjecture d'additivité

[Collins - N. '09-'10]

EMS et la conjecture d'additivité

- Entropie de Rényi d'une matrice densité

$$H^p(\rho) = \frac{\log \text{Tr } \rho^p}{1 - p}; \quad \lim_{p \downarrow 1} H^p(\rho) = H(\rho).$$

EMS et la conjecture d'additivité

- Entropie de Rényi d'une matrice densité

$$H^p(\rho) = \frac{\log \text{Tr } \rho^p}{1-p}; \quad \lim_{p \downarrow 1} H^p(\rho) = H(\rho).$$

- Entropie Minimale de Sortie d'un canal quantique

$$H_{\min}^p(\Phi) = \min_{\substack{\rho \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \\ \rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1}} H^p(\Phi(\rho)) = \min_{x \in \mathbb{C}^N, \|x\|=1} H^p(\Phi(|x\rangle\langle x|)).$$

EMS et la conjecture d'additivité

- Entropie de Rényi d'une matrice densité

$$H^p(\rho) = \frac{\log \text{Tr } \rho^p}{1-p}; \quad \lim_{p \downarrow 1} H^p(\rho) = H(\rho).$$

- Entropie Minimale de Sortie d'un canal quantique

$$H_{\min}^p(\Phi) = \min_{\substack{\rho \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \\ \rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1}} H^p(\Phi(\rho)) = \min_{x \in \mathbb{C}^N, \|x\|=1} H^p(\Phi(|x\rangle\langle x|)).$$

- Conjecture d'additivité [King - Ruskai '99]:

$$H_{\min}^p(\Phi \otimes \Psi) = H_{\min}^p(\Phi) + H_{\min}^p(\Psi) \quad \forall \Phi, \Psi.$$

EMS et la conjecture d'additivité

- Entropie de Rényi d'une matrice densité

$$H^p(\rho) = \frac{\log \text{Tr } \rho^p}{1-p}; \quad \lim_{p \downarrow 1} H^p(\rho) = H(\rho).$$

- Entropie Minimale de Sortie d'un canal quantique

$$H_{\min}^p(\Phi) = \min_{\substack{\rho \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \\ \rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1}} H^p(\Phi(\rho)) = \min_{x \in \mathbb{C}^N, \|x\|=1} H^p(\Phi(|x\rangle\langle x|)).$$

- Conjecture d'additivité [King - Ruskai '99]:

$$H_{\min}^p(\Phi \otimes \Psi) = H_{\min}^p(\Phi) + H_{\min}^p(\Psi) \quad \forall \Phi, \Psi.$$

- Inégalité " $\leq$ " triviale.

EMS et la conjecture d'additivité

- Entropie de Rényi d'une matrice densité

$$H^p(\rho) = \frac{\log \text{Tr } \rho^p}{1-p}; \quad \lim_{p \downarrow 1} H^p(\rho) = H(\rho).$$

- Entropie Minimale de Sortie d'un canal quantique

$$H_{\min}^p(\Phi) = \min_{\substack{\rho \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \\ \rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1}} H^p(\Phi(\rho)) = \min_{x \in \mathbb{C}^N, \|x\|=1} H^p(\Phi(|x\rangle\langle x|)).$$

- Conjecture d'additivité [King - Ruskai '99]:

$$H_{\min}^p(\Phi \otimes \Psi) = H_{\min}^p(\Phi) + H_{\min}^p(\Psi) \quad \forall \Phi, \Psi.$$

- Inégalité " $\leq$ " triviale.
- FAUSSE !!! Hayden '07, Hayden - Winter '08 ($p > 1$), Hastings '09 ($p = 1$).

EMS et la conjecture d'additivité

- Entropie de Rényi d'une matrice densité

$$H^p(\rho) = \frac{\log \text{Tr } \rho^p}{1-p}; \quad \lim_{p \downarrow 1} H^p(\rho) = H(\rho).$$

- Entropie Minimale de Sortie d'un canal quantique

$$H_{\min}^p(\Phi) = \min_{\substack{\rho \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \\ \rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1}} H^p(\Phi(\rho)) = \min_{x \in \mathbb{C}^N, \|x\|=1} H^p(\Phi(|x\rangle\langle x|)).$$

- Conjecture d'additivité [King - Ruskai '99]:

$$H_{\min}^p(\Phi \otimes \Psi) = H_{\min}^p(\Phi) + H_{\min}^p(\Psi) \quad \forall \Phi, \Psi.$$

- Inégalité " $\leq$ " triviale.
- FAUSSE !!!** Hayden '07, Hayden - Winter '08 ($p > 1$), Hastings '09 ($p = 1$).
- Tous les contre-exemples connus à ce jour sont **aléatoires** (pour $p \leq 2$).

Comment produire des contre-exemples ?

- Choisir Φ aléatoire et $\Psi = \overline{\Phi}$ (canal conjugué, remplacer U par $\overline{U}$).

Comment produire des contre-exemples ?

- Choisir Φ aléatoire et $\Psi = \overline{\Phi}$ (**canal conjugué**, remplacer U par $\overline{U}$).
- Fixer K et laisser $N \rightarrow \infty$.

Comment produire des contre-exemples ?

- Choisir Φ aléatoire et $\Psi = \overline{\Phi}$ (canal conjugué, remplacer U par $\overline{U}$).
- Fixer K et laisser $N \rightarrow \infty$.
- Trouver une borne inférieure pour $H_{\min}(\Phi) = H_{\min}(\overline{\Phi})$

Comment produire des contre-exemples ?

- Choisir Φ aléatoire et $\Psi = \overline{\Phi}$ (**canal conjugué**, remplacer U par $\overline{U}$).
- Fixer K et laisser $N \rightarrow \infty$.
- Trouver une borne inférieure pour $H_{\min}(\Phi) = H_{\min}(\overline{\Phi}) \rightsquigarrow$ problème difficile, il faut minorer **uniformément** les entropies des états dans l'image de Φ .

Comment produire des contre-exemples ?

- Choisir Φ aléatoire et $\Psi = \overline{\Phi}$ (**canal conjugué**, remplacer U par $\overline{U}$).
- Fixer K et laisser $N \rightarrow \infty$.
- Trouver une borne inférieure pour $H_{\min}(\Phi) = H_{\min}(\overline{\Phi}) \rightsquigarrow$ problème difficile, il faut minorer **uniformément** les entropies des états dans l'image de Φ .
 - ① Hayden - Leung - Winter
 - ② Hastings, Fukuda - King, Aubrun - Szarek - Werner
 - ③ Collins - N. '09
 - ④ Belinschi - Collins - N. '10 (en préparation)

Comment produire des contre-exemples ?

- Choisir Φ aléatoire et $\Psi = \overline{\Phi}$ (**canal conjugué**, remplacer U par $\overline{U}$).
- Fixer K et laisser $N \rightarrow \infty$.
- Trouver une borne inférieure pour $H_{\min}(\Phi) = H_{\min}(\overline{\Phi}) \rightsquigarrow$ problème difficile, il faut minorer **uniformément** les entropies des états dans l'image de Φ .
 - ① Hayden - Leung - Winter
 - ② Hastings, Fukuda - King, Aubrun - Szarek - Werner
 - ③ Collins - N. '09
 - ④ Belinschi - Collins - N. '10 (en préparation)
- Trouver une borne supérieure pour $H_{\min}(\Phi \otimes \Psi)$

Comment produire des contre-exemples ?

- Choisir Φ aléatoire et $\Psi = \overline{\Phi}$ (**canal conjugué**, remplacer U par $\overline{U}$).
- Fixer K et laisser $N \rightarrow \infty$.
- Trouver une borne inférieure pour $H_{\min}(\Phi) = H_{\min}(\overline{\Phi}) \rightsquigarrow$ problème difficile, il faut minorer **uniformément** les entropies des états dans l'image de Φ .
 - ① Hayden - Leung - Winter
 - ② Hastings, Fukuda - King, Aubrun - Szarek - Werner
 - ③ Collins - N. '09
 - ④ Belinschi - Collins - N. '10 (en préparation)
- Trouver une borne supérieure pour $H_{\min}(\Phi \otimes \Psi) \rightsquigarrow$ la **symétrie** $\Phi - \overline{\Phi}$ garantie une entropie petite pour l'image d'un **état maximalement intriqué**.

Comment produire des contre-exemples ?

- Choisir Φ aléatoire et $\Psi = \overline{\Phi}$ (**canal conjugué**, remplacer U par $\overline{U}$).
- Fixer K et laisser $N \rightarrow \infty$.
- Trouver une borne inférieure pour $H_{\min}(\Phi) = H_{\min}(\overline{\Phi}) \rightsquigarrow$ problème difficile, il faut minorer **uniformément** les entropies des états dans l'image de Φ .
 - ① Hayden - Leung - Winter
 - ② Hastings, Fukuda - King, Aubrun - Szarek - Werner
 - ③ Collins - N. '09
 - ④ Belinski - Collins - N. '10 (en préparation)
- Trouver une borne supérieure pour $H_{\min}(\Phi \otimes \Psi) \rightsquigarrow$ la **symétrie** $\Phi - \overline{\Phi}$ garantie une entropie petite pour l'image d'un **état maximalement intriqué**.
 - ① Hayden - Winter
 - ② Collins - N. '09

Résultats principaux

Théorème (Collins - N. '09)

Pour tout K fixé, il existe un convexe non-aléatoire qui contient asymptotiquement, pour presque tout canal quantique Φ , les vecteur des valeurs propres de tous les états dans l'image de Φ . En particulier, l'EMS de Φ est minorée par la valeur de l'entropie dans les points extrémaux de ce convexe.

Théorème (Collins - N. '09)

Pour tout K fixé, presque sûrement lorsque $N \rightarrow \infty$, les valeurs propres non nulles de la matrice densité aléatoire $Z = [\Phi \otimes \bar{\Phi}](E_N)$ convergent vers

$$\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K^2} - \frac{1}{K^3}, \underbrace{\frac{1}{K^2} - \frac{1}{K^3}, \dots, \frac{1}{K^2} - \frac{1}{K^3}}_{K^2-1 \text{ fois}} \right).$$

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

- Considérer des environnements non-purs $\leadsto$ généralisations des ensembles induits et asymptotiques.

Conclusion et perspectives

- Considérer des environnements non-purs $\leadsto$ généralisations des ensembles induits et asymptotiques.
- Densité des valeur propres pour l'ensemble asymptotique.

Conclusion et perspectives

- Considérer des environnements non-purs $\leadsto$ généralisations des ensembles induits et asymptotiques.
- Densité des valeur propres pour l'ensemble asymptotique.
- Régimes asymptotiques pour les interactions répétées.

Conclusion et perspectives

- Considérer des environnements non-purs $\rightsquigarrow$ généralisations des ensembles induits et asymptotiques.
- Densité des valeur propres pour l'ensemble asymptotique.
- Régimes asymptotiques pour les interactions répétées.
- Étudier des états aléatoires associés aux réseaux $\mathbb{Z}^d$.

Conclusion et perspectives

- Considérer des environnements non-purs $\rightsquigarrow$ généralisations des ensembles induits et asymptotiques.
- Densité des valeur propres pour l'ensemble asymptotique.
- Régimes asymptotiques pour les interactions répétées.
- Étudier des états aléatoires associés aux réseaux $\mathbb{Z}^d$.
- Caractériser toutes les distributions limites possibles pour les marginales des états graphes.

Conclusion et perspectives

- Considérer des environnements non-purs $\rightsquigarrow$ généralisations des ensembles induits et asymptotiques.
- Densité des valeur propres pour l'ensemble asymptotique.
- Régimes asymptotiques pour les interactions répétées.
- Étudier des états aléatoires associés aux réseaux $\mathbb{Z}^d$.
- Caractériser toutes les distributions limites possibles pour les marginales des états graphes.
- Lien avec les probabilités libres: semi groupes de convolution multiplicative classiques et libres.

Conclusion et perspectives

- Considérer des environnements non-purs $\leadsto$ généralisations des ensembles induits et asymptotiques.
- Densité des valeur propres pour l'ensemble asymptotique.
- Régimes asymptotiques pour les interactions répétées.
- Étudier des états aléatoires associés aux réseaux $\mathbb{Z}^d$.
- Caractériser toutes les distributions limites possibles pour les marginales des états graphes.
- Lien avec les probabilités libres: semi groupes de convolution multiplicative classiques et libres.
- Caractériser les marginales qui satisfont la loi de surface.

Conclusion et perspectives

- Considérer des environnements non-purs $\leadsto$ généralisations des ensembles induits et asymptotiques.
- Densité des valeur propres pour l'ensemble asymptotique.
- Régimes asymptotiques pour les interactions répétées.
- Étudier des états aléatoires associés aux réseaux $\mathbb{Z}^d$.
- Caractériser toutes les distributions limites possibles pour les marginales des états graphes.
- Lien avec les probabilités libres: semi groupes de convolution multiplicative classiques et libres.
- Caractériser les marginales qui satisfont la loi de surface.
- États graphe dual: les sommets encodent l'intrication et les arêtes représentent les interactions unitaires.

Conclusion et perspectives

- Considérer des environnements non-purs $\leadsto$ généralisations des ensembles induits et asymptotiques.
- Densité des valeur propres pour l'ensemble asymptotique.
- Régimes asymptotiques pour les interactions répétées.
- Étudier des états aléatoires associés aux réseaux $\mathbb{Z}^d$.
- Caractériser toutes les distributions limites possibles pour les marginales des états graphes.
- Lien avec les probabilités libres: semi groupes de convolution multiplicative classiques et libres.
- Caractériser les marginales qui satisfont la loi de surface.
- États graphe dual: les sommets encodent l'intrication et les arêtes représentent les interactions unitaires.
- D'autres états en entrée pour le canal produit $\Phi \otimes \overline{\Phi}$.

Conclusion et perspectives

- Considérer des environnements non-purs $\leadsto$ généralisations des ensembles induits et asymptotiques.
- Densité des valeur propres pour l'ensemble asymptotique.
- Régimes asymptotiques pour les interactions répétées.
- Étudier des états aléatoires associés aux réseaux $\mathbb{Z}^d$.
- Caractériser toutes les distributions limites possibles pour les marginales des états graphes.
- Lien avec les probabilités libres: semi groupes de convolution multiplicative classiques et libres.
- Caractériser les marginales qui satisfont la loi de surface.
- États graphe dual: les sommets encodent l'intrication et les arêtes représentent les interactions unitaires.
- D'autres états en entrée pour le canal produit $\Phi \otimes \overline{\Phi}$.
- Valeur presque sûre pour l'EMS d'un produit de canaux aléatoires conjugués.

Merci !