DEFORMATION DE RANG 1 POUR DES TENS ALEA - BORNE INF.

I) Rappels

- Tenseurs symétriques Gaussiens

$W \in V^d \mathbb{R}^n \subseteq (\mathbb{R}^n)^{\otimes d}$

$\boxed{W = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} P_\sigma W'}$, avec W' tenseur Gaussien aléatoire, entrées iid, $\boxed{W'_{i_1 \dots i_d} \sim \mathcal{N}(0, \frac{2}{n})}$

On a : $\underbrace{W_{i_1, \dots, i_d}}_{\text{distincts}} \sim \mathcal{N}(0, \frac{2}{d!\,n})$

$$W_{i, \dots, i} \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{2}{n})$$

Remarque : $d=2$, cas matriciel : $W =$ GOE standard

$W_{ii} \sim \mathcal{N}(0, \frac{2}{n})$; $i \neq j$ $W_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$

- Perturbations de rang 1

$\boxed{T := \lambda x^{\otimes d} + W}$, $x \sim \mathcal{X} \leftarrow$ loi de la pert.

$\|x\| = 1$, $\lambda > 0$, $x \perp\!\!\!\perp W$

Ici, on s'intéresse à $\boxed{\mathcal{X} = \text{loi uniforme sur la sphère unité de } \mathbb{R}^n}$

- Problème : on nous donne soit un échantillon de W, soit un éch. de T ; il faut décider dans quel cas on est.

II) Enoncé du théorème : borne inférieure

THÉORÈME : Dans le cas du modèle avec $\mathcal{X}$ = loi uniforme sur la sphère, soit

$$\left(\lambda^{d}_{*,sph}\right)^2 = 2\log d + 2\log\log d + 2 - 4\log 2 + o(1)$$

Alors, pour $\lambda < \lambda^{d}_{*,sph}$, la détection faible est impossible.

DÉFINITION Soient P_n = loi de T, tenseur de forme

Q_n = loi de W, "bruit" Gaussien

Un test est une fonction $\tau_n : V^d\mathbb{R}^n \to \{\text{"P"}, \text{"Q"}\}$

"spike" → "P", "pas de spike" → "Q"

Soit $A_n := \tau_n^{-1}(\text{"P"})$. On a $\mathbb{P}_{succes} := \frac{1}{2}\left[P_n(A_n) + Q_n(A_n^c)\right]$

Une suite de tests $\tau = (\tau_n)_n \equiv (A_n := \tau_n^{-1}(\text{"P"}))_n$ réalise une

- détection faible si $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_{succes} > \frac{1}{2}$
- détection forte si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{succes} = 1$.

Lien détection forte ⟺ contiguité

Rappel $P_n \lhd Q_n$ (P_n contigu p.r.à Q_n) si $\forall (A_n)$ tq $Q_n(A_n) \to 0$, on a aussi $P_n(A_n) \to 0$.

Lemme Si $P_n \lhd Q_n$, alors la dét. forte est impossible.

Preuve : $\mathbb{P}_{succes} = \frac{1}{2}(P_n(A_n) + 1 - Q_n(A_n))$. Pour avoir $\mathbb{P}_{succes} \to 1$, il faut $P_n(A_n) \to 1$ et $Q_n(A_n) \to 0$, impossible, car $P_n \lhd Q_n$ $\square$

Lien détection faible ⟺ distance en variation totale

$$d_{TV}(P_n, Q_n) = \sup_{A_n} |P_n(A_n) - Q_n(A_n)|$$

Lemme Si $d_{TV}(P_n, Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors la détection faible est impossible.

Preuve Pour avoir $\mathbb{P}_{succes} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$, il faut que $(A_n)_n$ est telle que $Q_n(A_n) - P_n(A_n) \geq \varepsilon$ ⚡ □

Lien entre la contiguïté ◁ et la d_{TV} et χ^2

DEF : $\boxed{\chi^2(P\|Q) := \mathbb{E}_Q\left[\left(\frac{dP}{dQ}\right)^2\right] - 1.}$

Lemme • $d_{TV}(P,Q) \leq 2\sqrt{\chi^2(P\|Q)}$ [Pinsker]

• $P(A) \leq \sqrt{1+\chi^2(P\|Q)}\,\sqrt{Q(A)}$ [C-S]

Corollaire :

• Si $\chi^2(P_n\|Q_n) = o(1)$, alors la détection faible est impossible.

• Si $\chi^2(P_n\|Q_n) = O(1)$, alors la détection forte est impossible.

Cas matriciel (d=2)

• dét. faible possible $\forall\, \lambda > 0$: $A_n := Tr^{-1}([\frac{\lambda}{2}, +\infty))$

• dét forte possible ssi $\lambda > 1$. Si $\lambda < 1$, $P_n \triangleleft Q_n$

❗ $\lambda^*_{\text{dét forte}} = \lambda_{BBP}$

III) Estimation de $\chi^2(P_n \| Q_n)$

Etape 1 : formule exacte pour $\frac{dP_n}{dQ_n}$

$$\frac{dP_n}{dQ_n}(T) = \frac{\mathbb{E}_{x\sim\mathcal{X}} \exp\left(-\frac{n}{4}\|T-\lambda x^{\otimes d}\|^2\right)}{\exp\left(-\frac{n}{4}\|T\|^2\right)}$$

recall : variance $= \frac{2}{n}$

Etape 2 : formule exacte pour $\chi^2(P_n \| Q_n)$

$$1+\chi^2(P_n\|Q_n) = \mathbb{E}_{Q_n}\left(\frac{dP_n}{dQ_n}\right)^2 = \mathbb{E}_{x \perp\!\!\!\perp x' \sim \mathcal{X}} \mathbb{E}_{T\sim Q_n} \exp\left(\frac{n\lambda}{2}\langle T, x^{\otimes d} + x'^{\otimes d}\rangle - \frac{n\lambda^2}{2}\right)$$

Compute : for any vector $y \in V^d \mathbb{R}^n$, we have

$$\mathbb{E}_{Q_n}\langle W, y\rangle = \mathbb{E}_{Gauss}\langle W', y\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\|y\|^2\right)$$

Hence, $1+\chi^2(P_n\|Q_n) = \mathbb{E}_{x\perp\!\!\!\perp x'\sim\mathcal{X}} \exp\left(\frac{n\lambda^2}{2}\underbrace{\langle x, x'\rangle^d}_{\beta}\right)$

Etape 3 : fonction de taux pour $\beta = \langle x, x'\rangle^d$

concentration de la mesure : $\langle x, x'\rangle$ exp. petit

$$\mathbb{P}_{\mathcal{X}}(\langle x, x'\rangle \geq t) \approx \exp\left(-n f_{\mathcal{X}}(t)\right)$$

Pour nous : $f_{\mathcal{X}}(t) := -\frac{1}{2}\log(1-t^2)$

(lié à la fonction Beta incomplète, car $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\langle x, x'\rangle \sim \mathrm{Beta}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$)

Etape 5 : asymptotiques

$$\mathbb{E}\exp\left(\frac{n\lambda^2}{2}\langle x,x'\rangle^d\right) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{n\lambda^2}{2}\langle x,x'\rangle^d\right) \geq u\right) du$$

$$u := \exp\left(\frac{n\lambda^2}{2}t^d\right) \qquad \text{pour } t \in [-1,1]$$

en fait, $t \in (0,1)$ ...

$$\simeq \int_0^1 \mathbb{P}(\langle x,x'\rangle \geq t) \exp\left(\frac{n\lambda^2}{2}t^d\right) \frac{n\lambda^2}{2} d t^{d-1}\, dt$$

$$\simeq \int_0^1 \exp\left[n\left(-f_{\mathcal{X}}(t) + \frac{\lambda^2}{2}t^d\right)\right] dt$$

$\Leftrightarrow$ on veut $\boxed{f_{\mathcal{X}}(t) > \frac{\lambda^2}{2}t^d \quad \forall t \in [0,1]}$

Techical computations (Appendix A)

$$\Rightarrow \left(\lambda^d_{*,\mathrm{sph}}\right)^2 = 2\log d + 2\log\log d + 2 - 4\log 2 + o(1)$$

! à un facteur $\sqrt{2}$ près...

IV) Remarques

- Pour les autres modèles de perturbations (loi $\mathcal{X}$), il suffit de calculer les fonctions de taux $f_{\mathcal{X}}$
- Même type de résultats pour d'autres modèles de bruit (Wigner $\neq$ Gaussien)